LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận văn **"Dạy học phương trình chứa căn thức theo hướng phát triển năng lực giải toán cho học sinh Trung học phổ thông"** là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu, kết quả nêu trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kì công trình nào khác.

Tác giả

Trần Quốc Phong

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin chân thành cám ơn Ban giám hiệu, phòng Sau đại học, Ban chủ nhiệm khoa Toán - Lý - Tin trường Đại học Tây Bắc, các cán bộ, giảng viên trường Đại học Sư phạm Hà Nội, trường Đại học Tây Bắc đã tạo điều kiện thuận lợi giúp tôi hoàn thành khóa học và thực hiện thành công việc nghiên cứu, hoàn thiện luận văn.

Đặc biệt, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới ***PGS.TS. Nguyễn Triệu Sơn***, người đã trực tiếp hướng dẫn và tận tình chỉ bảo, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin trân trọng cám ơn Ban Giám hiệu trường THPT Mộc Lỵ - Sơn La đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và viết luận văn. Xin cám ơn gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Mặc dù bản thân đã rất cố gắng trong quá trình nghiên cứu đề tài và hoàn thiện luận văn, song luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong quý thầy cô giáo, các bạn đồng nghiệp quan tâm góp ý kiến để luận văn được hoàn thiện hơn./.

Tác giả

Trần Quốc Phong

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

ĐS	Đáp số
GV	Giáo viên
HS	Học sinh
NXB	Nhà xuất bản
PT	Phương trình
SGK	Sách giáo khoa
THPT	Trung học phổ thông
TNSP	Thực nghiệm sư phạm
TS	Tiến sĩ
VD	Ví dụ
(?)	Câu hỏi
(!)	Câu trả lời

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Bồi dưỡng và phát triển năng lực người học là hướng tới phát triển những năng lực chung mà mọi học sinh (HS) đều cần để có thể tham gia hiệu quả nhiều loại hoạt động trong đời sống xã hội và cho học suốt đời (ví dụ: năng lực nhận thức, năng lực giải quyết vấn đề, năng lực hợp tác, năng lực tự học v.v…). Để năng lực của người học được phát triển thì đòi hỏi mỗi giáo viên (GV) phải có đủ những kiến thức cần thiết, có thời gian và kinh nghiệm sư phạm, biết vận dụng linh hoạt các phương pháp tiên tiến, phương tiện hiện đại vào quá trình dạy học, đảm bảo điều kiện và thời gian tự học, tự nghiên cứu cho học sinh.

Đối với học sinh trung học phổ thông (THPT), rất nhiều học sinh còn bộc lộ những yếu kém, hạn chế trong khi làm bài tập như: khả năng huy động kiến thức, khả năng phân tích bài toán, khả năng biến đổi bài toán về dạng quen thuộc ..., dẫn đến cách suy nghĩ vẫn tản mạn, mất nhiều thời gian mới tìm được cách giải, hoặc rơi vào tình trạng mông lung, bế tắc mà không tìm được phương hướng giải quyết.

Phương trình (PT) là một trong những nội dung cơ bản và xuyên suốt trong chương trình THPT; đặc biệt với chủ đề về phương trình chứa căn thức là một trong những nội dung khi tiếp cận học sinh còn gặp nhiều khó khăn. Bởi vậy việc tổ chức các hoạt động dạy học nhằm phát triển năng lực giải phương trình chứa căn thức cho học sinh là rất cần thiết và có ý nghĩa quan trọng góp phần nâng cao chất lượng dạy học môn toán ở THPT.

Chính vì những lý do trên tôi đã thực hiện đề tài: **"Dạy học phương trình chứa căn thức theo hướng phát triển năng lực giải toán cho học sinh Trung học phổ thông"**

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu đề xuất những biện pháp phát triển năng lực giải toán cho học sinh trong dạy học chủ đề PT chứa căn thức ở trường THPT.

3. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU, PHẠM VI NGHIÊN CỨU

- Đối tượng nghiên cứu: Quá trình dạy học PT chứa căn thức hướng tới việc phát triển năng lực giải toán cho học sinh ở trường THPT Mộc Lỵ, huyện Mộc Châu, tỉnh Sơn La.

- Phạm vi nghiên cứu: Dạy học chủ đề PT chứa căn thức. PT chứa căn thức đề cập trong luận văn được hiểu ở giới hạn nghiên cứu là phương trình vô tỷ.

4. NHIỆM VỤ NGHIÊN CỨU

- Nghiên cứu lý luận về năng lực, năng lực toán học, năng lực giải toán, phương pháp dạy học giải bài tập toán cho học sinh THPT.

- Tìm hiểu về nội dung chương trình và thực tiễn dạy học giải các PT chứa căn thức ở trường THPT Mộc Lỵ, huyện Mộc Châu, tỉnh Sơn La.

- Xây dựng hệ thống các bài toán và đề xuất các biện pháp phát triển năng lực giải toán PT chứa căn thức cho học sinh THPT.

- Thực nghiệm sư phạm để kiểm nghiệm tính khả thi và hiệu quả của hệ thống các bài toán và các biện pháp phát triển năng lực giải toán PT chứa căn thức cho học sinh THPT.

5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Phương pháp nghiên cứu lý luận: Nghiên cứu các tài liệu về lý luận dạy học môn toán, sách, báo, tạp chí về khoa học toán học, tâm lý học và các công trình liên quan đến đề tài.

- Phương pháp điều tra, quan sát: Tìm hiểu, điều tra tình hình dạy học, chất lượng HS trước và sau khi thử nghiệm.

- Thực nghiệm sư phạm: Thử nghiệm giảng dạy một số giáo án nhằm đánh giá tính khả thi và hiệu quả của đề tài.

6. GIẢ THUYẾT KHOA HỌC

Nếu dạy học giúp cho học sinh nắm vững kiến thức cơ bản, có kĩ năng và phương pháp giải PT chứa căn thức như đã đề xuất trong luận văn thì ta đã xây dựng được nền tảng cơ bản để phát triển năng lực giải PT chứa căn thức cho học sinh, đồng thời tăng cường tính tích cực, chủ động, sáng tạo của học sinh trong học tập môn Toán.

7. BỐ CỤC LUẬN VĂN

Luận văn ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và phụ lục, nội dung chính của luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Cơ sở lý luận và thực tiễn

Chương 2. Một số biện pháp phát triển năng lực giải toán cho học sinh trong dạy học chủ đề PT chứa căn thức

Chương 3. Thực nghiệm sư phạm

Chương 1. CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN

1.1. Dạy học giải bài tập toán cho học sinh

1.1.1. Mục đích, vị trí, vai trò và ý nghĩa của bài tập toán ở trường phổ thông

G.Polya cho rằng: "Trong toán học, nắm vững bộ môn toán quan trọng hơn rất nhiều so với một kiến thức thuần túy mà ta có thể bổ sung nhờ một cuốn sách tra cứu thích hợp. Vì vậy cả trong trường trung học cũng như trong các trường chuyên nghiệp, ta không chỉ truyền thụ cho HS những kiến thức nhất định, mà quan trọng hơn nhiều là phải dạy cho họ đến một mức độ nào đó nắm vững môn học. Vậy thế nào là nắm vững môn toán? Đó là biết giải toán!" [16]. Trên cơ sở đó, chúng ta có thể thấy rõ mục đích, vị trí, vai trò và ý nghĩa của bài tập toán trong trường THPT như sau:

a) Mục đích

Để đào tạo được nguồn nhân lực đáp ứng được nhu cầu ngày càng cao của xã hội ngày nay, đó là những cá nhân có đủ các yếu tố: năng động, sáng tạo, có tinh thần trách nhiệm, có trí tuệ, có khả năng lao động kĩ thuật cao... đòi hỏi cả hệ thống giáo dục nói chung và các nhà trường THPT nói riêng đã và đang phải đặt ra nhiều mục đích, mục tiêu cụ thể cho việc đào tạo. Toán học có vai trò to lớn trong đời sống, trong khoa học và công nghệ hiện đại, kiến thức toán học là công cụ để HS học tập tốt các môn học khác, giúp HS hoạt động có hiệu quả trong mọi lĩnh vực. Vì vậy, trong dạy toán nói chung, giải bài tập toán nói riêng cần xác định những mục đích cụ thể, sát thực. Có thể thấy rõ một số mục đích bài tập toán ở trường phổ thông là:

- Phát triển ở HS những năng lực và phẩm chất trí tuệ, giúp HS biết những tri thức khoa học của nhân loại được tiếp thu thành kiến thức của bản thân, thành công cụ để nhận thức và hành động đúng đắn trong các lĩnh vực động cũng như trong học tập hiện nay và sau này.

- Làm cho HS từng bước nắm được một cách chính xác, vững chắc và có hệ thống những kiến thức và kỹ năng toán học phổ thông cơ bản, hiện đại, phù hợp với thực tiễn và có năng lực vận dụng những tri thức đó vào những tình huống cụ thể, vào đời sống, vào lao động sản xuất, vào việc học tập các bộ môn khoa học khác.

- Thông qua việc giải bài tập, HS khắc sâu các kiến thức đã học, biết xâu chuỗi các kiến với nhau, kích thích sự tìm tòi, sáng tạo các kiến thức mới đối với HS. Qua đó rèn luyện, phát triển tư duy lôgic, sáng tạo, tính kiên trì, cần cù, chịu khó... ở người học.

- Phát triển thế giới quan duy vật biện chứng, hình thành những phẩm chất đạo đức của người lao động mới.

b) Vị trí và vai trò của bài tập toán

Trong dạy học toán ở trường THPT, bài tập toán có vai trò quan trọng, vì "Ở trường phổ thông, dạy toán là dạy hoạt động toán học. Đối với HS có thể xem giải toán là hình thức chủ yếu của hoạt động toán học. Các bài tập toán ở trường phổ thông là một phương tiện rất có hiệu quả và không thể thay thế được trong việc giúp HS nắm vững những tri thức, phát triển tư duy, hình thành kĩ năng kĩ xảo, ứng dụng toán học vào thực tiễn. Hoạt động giải bài tập toán là điều kiện để thực hiện tốt các nhiệm vụ dạy học toán ở trường phổ thông. Vì vậy, tổ chức có hiệu quả việc dạy giải bài tập toán học có vai trò quyết định đối với chất lượng dạy học toán" [10].

Theo Nguyễn Bá Kim [10]: "Bài tập toán học có vai trò quan trọng trong môn toán. Điều căn bản là bài tập có vai trò giá mang hoạt động của HS. Thông qua giải bài tập, HS phải thực hiện những hoạt động nhất định bao gồm cả nhận dạng và thể hiện định nghĩa, định lý, quy tắc hay phương pháp, những hoạt động toán học phức hợp, những hoạt động trí tuệ phổ biến trong toán học, những hoạt động trí tuệ chung và những hoạt động ngôn ngữ". Như vậy, bài tập toán học ở trường phổ thông có vị trí, vai trò quan trọng trong hoạt động dạy, hoạt động học toán ở trường THPT. Vì thế, GV cần lựa chọn các bài tập toán sao cho phù hợp với từng đối tượng và năng lực của từng HS, như thế mới phát huy được năng lực giải toán của HS.

c) Ý nghĩa

Ở trường phổ thông, dạy toán là dạy hoạt động toán học. Đối với HS có thể xem việc giải toán là hình thức chủ yếu của hoạt động toán học. Việc giải toán có nhiều ý nghĩa. Cụ thể:

- Là hình thức tốt để củng cố, đào sâu, hệ thống hóa kiến thức và rèn luyện, phát triển kỹ năng. Trong nhiều trường hợp, giải toán là một hình thức tốt để dẫn dắt HS tự mình đi tìm kiến thức mới.
- Là một hình thức vận dụng những kiến thức đã học vào những vấn đề cụ thể, vào thực tiễn và vào vấn đề mới.
- Là hình thức tốt để GV kiểm tra HS và HS tự kiểm tra về năng lực, về mức độ tiếp thu và vận dụng kiến thức đã học.
- Việc giải toán có tác dụng lớn gây hứng thú học tập của HS, phát triển trí tuệ và giáo dục, rèn luyện, phát triển người HS về rất nhiều mặt.

1.1.2. Chức năng của bài tập toán

Trong dạy học, bài tập toán được sử dụng với nhiều dụng ý khác nhau. Một bài tập có thể tạo tiền đề xuất phát, để gợi động cơ, để làm việc với một nội dung mới, để củng cố hoặc kiểm tra... Mỗi bài tập cụ thể được đặt ra ở một thời điểm nào đó của quá trình dạy học đều chứa đựng một cách tường minh hay ẩn tàng những chức năng khác nhau, những chức năng này đều hướng đến các mục đích dạy học trong môn Toán, hệ thống bài tập có các chức năng sau [10].

- *Với chức năng dạy học*: Bài tập nhằm hình thành, củng cố cho HS những tri thức, kĩ năng, kĩ xảo ở những giai đoạn khác nhau của quá trình dạy học. Cụ thể như: Làm sáng tỏ và khắc sâu những vấn đề về lý thuyết; thu gọn, mở rộng, bổ sung cho lý thuyết trên cơ sở thường xuyên hệ thống hóa kiến thức và nhấn mạnh phần trọng tâm của lý thuyết. Đặc biệt, bài tập còn mang tác dụng giáo dục kĩ thuật, tổng hợp thể hiện qua việc giúp HS rèn luyện kĩ năng tính toán, kĩ năng đọc hình vẽ, kĩ năng sử dụng các phương tiện học tập, kĩ năng thực hành toán học; phương pháp tư duy, thói quen đặt vấn đề một cách hợp lí, ngắn gọn tiết kiệm thời gian...

- *Với chức năng giáo dục:* Bài tập giúp HS hình thành thế giới quan duy vật biện chứng, từng bước nâng cao hứng thú học tập, tạo niềm tin ở bản thân HS và phẩm chất của con người lao động, rèn luyện, phát triển cho HS đức tính kiên nhẫn, bền bỉ, không ngại khó, sự chính xác và chu đáo trong khoa học.

- *Với chức năng phát triển:* Bài tập giúp HS ngày càng nâng cao khả năng suy nghĩ, rèn luyện, phát triển các thao tác tư duy như: phân tích, tổng hợp, suy diễn, quy nạp, tương tự, đặc biệt hóa, khái quát hóa... thông thạo một số phương pháp suy luận toán học, biết phát hiện và giải quyết vấn đề một cách thông minh sáng tạo. Từ đó, HS hình thành phẩm chất tư duy khoa học.

- *Với chức năng kiểm tra:* Bài tập giúp GV và HS đánh giá được mức độ và kết quả của quá trình dạy và học, đồng thời nó cũng đánh giá khả năng độc lập học toán và trình độ pháp triển của HS .

Thông qua giải bài tập, GV có thể tìm thấy những điểm mạnh, những hạn chế trong việc tiếp thu và trình bày tri thức của HS. Qua đó có thể bổ sung, rèn luyện, phát triển và phát triển tiếp cho HS. Có thể nói rằng hiệu quả của việc dạy toán ở trường phổ thông phần lớn phụ thuộc vào việc khai thác và thực hiện một cách đầy đủ các chức năng có thể có của các tác giả viết SGK đã có dụng ý đưa vào chương trình. Người GV phải có nhiệm vụ khám phá và thực hiện dụng ý của tác giả bằng năng lực sư phạm của mình.

1.1.3. Dạy học giải bài tập toán học theo tư tưởng của G.Polya

Trong chương trình môn toán ở trường phổ thông, nhiều bài tập toán chưa có hoặc không có thuật giải và cũng không có một thuật giải tổng quát nào để giải tất cả các bài toán. Chúng ta chỉ có thể thông qua việc dạy học giải một số bài toán cụ thể mà dần truyền thụ cho HS cách thức, kinh nghiệm trong việc suy nghĩ, tìm tòi lời giải cho mỗi bài toán. Dạy học giải bài tập toán không có nghĩa là GV cung cấp cho HS lời giải bài toán. Biết lời giải bài toán không quan trọng bằng làm thế nào để giải được bài toán, vì vậy cần trang bị những hướng dẫn chung, gợi ý các suy nghĩ tìm tòi, phát hiện cách giải bài toán là cần thiết. Dựa trên những tư tưởng tổng quát cùng với những gợi ý chi tiết của G.Polya về cách thức giải toán, phương pháp tìm tòi lời giải cho một bài toán thường được tiến hành theo bốn bước sau [16]:

- Bước 1: *Tìm hiểu nội dung bài toán.* Để tìm hiểu nội dung của bài toán, cần chú ý các yếu tố cơ bản như:

+ Phân biệt cái đã cho, cái phải tìm và cái phải chứng minh.

+ Có thể dùng công thức, kí hiệu, hình vẽ… để diễn tả đề bài.

+ Phân biệt các thành phần khác nhau của điều kiện. Có thể diễn tả các điều kiện đó thành công thức không?...

- Bước 2: *Xây dựng chương trình giải.* Yếu tố quan trọng khi giải được bài toán chính là việc xây dựng chương trình giải cho bài toán đó. Vì vậy khi thực hiện, chúng ta cần chú ý:

+ Phân tích bài toán đã cho thành nhiều bài toán đơn giản quen thuộc.

+ Lựa chọn những kiến thức đã học (Định nghĩa, định lí, quy tắc...) gần gũi hơn cả với dữ kiện của bài toán rồi mò mẫm dự đoán kết quả.

+ Sử dụng những phương pháp đặc thù với từng dạng toán như chứng minh (phản chứng, qui nạp toán học...), toán dựng hình, toán quỹ tích...

- Bước 3: *Trình bày lời giải.* Trình bày lại lời giải sau khi đã điều chỉnh những chỗ cần thiết.

- Bước 4: *Kiểm tra và nghiên cứu lời giải.*

+ Kiểm tra lại kết quả, xem lại các lập luận trong quá trình giải.

+ Nhìn lại toàn bộ các bước giải, rút ra tri thức phương pháp để giải một bài toán nào đó.

+ Tìm thêm cách giải khác (nếu có thể).

+ Khai thác kết quả có thể có của bài toán.

+ Đề xuất bài toán tương tự, bài toán đặc biệt hoặc khái quát hoá bài toán...

Như vậy, có thể nói "Quá trình HS học phương pháp chung để giải toán là một quá trình biến những tri thức phương pháp tổng quát thành kinh nghiệm giải toán của bản thân mình thông qua việc giải hàng loạt bài toán cụ thể. Từ phương pháp chung giải toán đi tới cách giải một bài toán cụ thể còn là cả một chặng đường đòi hỏi lao động tích cực của người HS, trong đó có nhiều yếu tố sáng tạo" [16].

1.2. Năng lực giải toán của học sinh

1.2.1. Nguồn gốc của năng lực

Từ cuối thế kỉ XIX đến nay đã có nhiều ý kiến khác nhau về bản chất và nguồn gốc của năng lực và tài năng. Hiện nay đã có xu hướng thống nhất trên một số quan điểm cơ bản, quan trọng về lí luận cũng như về thực tiễn:

- *Một là*, những yếu tố bẩm sinh, di truyền là điều kiện cần thiết ban đầu cho sự phát triển năng lực. Đó là điều kiện cần nhưng chưa đủ (động vật bậc cao sống với người hàng ngàn năm vẫn không có năng lực như con người vì chúng không có các tư chất bẩm sinh di truyền làm tiền đề cho sự phát triển năng lực).

- *Hai là,* năng lực con người có nguồn gốc xã hội, lịch sử. Muốn một người của thế hệ sau được phát triển trong thế giới tự nhiên, xã hội đã được các thế hệ trước cải tạo, xây dựng và để lại các dấu ấn đó trong môi trường văn hóa - xã hội. Con người khi lọt lòng mẹ đã có sẵn các tố chất nhất định cho sự phát triển các năng lực tương ứng, nhưng nếu không có môi trường xã hội thì cũng không phát triển được.

- *Ba là*, năng lực có nguồn gốc từ hoạt động và là sản phẩm của hoạt động. Sống trong môi trường xã hội tự nhiên do các thế hệ trước tạo ra và chịu sự tác động của nó, trẻ em và người lớn ở thế hệ sau không chỉ đơn giản sử dụng hay thích ứng với các thành tựu của các thế hệ trước để lại, mà còn chiếm lĩnh chúng và quan trọng hơn là cải tạo chúng để không chỉ đạt được các kết quả "vật chất" mà còn tạo ra tiền đề mới cho hoạt động tiếp theo. Tóm lại, ngày nay khoa học cho rằng năng lực và tài năng là hiện tượng có bản chất nguồn gốc phức tạp. Các tố chất và hoạt động của con người tương tác qua lại với nhau để tạo ra các năng lực, tài năng. Vậy đào tạo có hiệu quả nhất là đưa HS vào các dạng hoạt động thích hợp.

1.2.2. Khái niệm về năng lực, năng lực Toán học

a) Khái niệm về năng lực

Theo nhà Tâm lý học người Nga V.A.Cruchetxki: "Năng lực được hiểu như là một phức hợp các đặc điểm tâm lý cá nhân của con người đáp ứng những yêu cầu của một hoạt động nào đó và là điều kiện để thực hiện thành công hoạt động đó" [1]. Như vậy, nói đến năng lực là nói đến một cái gì đó tiềm ẩn trong một cá thể, một thứ phi vật chất. Song nó được thể hiện ra qua hoạt động và đánh giá được nó qua kết quả hoạt động. Thông thường, một người được gọi là có năng lực nếu người đó nắm vững tri thức, có kĩ năng, kĩ xảo của một loại hoạt động nào đó và đạt được kết quả tốt hơn, cao hơn so với trình độ trung bình của những người khác cùng tiến hành hoạt động đó trong những điều kiện và hoàn cảnh tương đương. Người ta thường phân biệt ba cấp độ của năng lực:

- Năng lực là tổng hoà các kĩ năng, kĩ xảo.

- Tài năng là một tổ hợp các năng lực tạo nên tiền đề thuận lợi cho hoạt động có kết quả cao, những thành tích đạt được này vẫn nằm trong khuôn khổ của những thành tựu đạt được của xã hội loài người.

- Thiên tài là một tổ hợp đặc biệt các năng lực, nó cho phép đạt được những thành tựu sáng tạo mà có ý nghĩa lịch sử vô song.

Khi nói đến năng lực phải nói đến năng lực trong loại hoạt động nhất định của con người. Năng lực chỉ nảy sinh và quan sát được trong hoạt động giải quyết những yêu cầu đặt ra.

b) Khái niệm năng lực Toán học

Về khái niệm năng lực Toán học, nhà Tâm lý học người Nga V.A.Cruchetxki đã giải thích trên hai bình diện [1]:

- Như là các năng lực sáng tạo (khoa học) - các năng lực hoạt động toán học tạo ra được các kết quả, thành tựu mới, khách quan và quý giá.

- Như là các năng lực học tập giáo trình phổ thông, lĩnh hội nhanh chóng và có kết quả cao các kiến thức, kĩ năng, kĩ xảo tương ứng. Như vậy, năng lực toán học là các đặc điểm tâm lí cá nhân (là các đặc điểm hoạt động trí tuệ) đáp ứng được các yêu cầu của hoạt động học toán và tạo điều kiện lĩnh hội các kiến thức, kĩ năng, kĩ xảo trong lĩnh vực toán học tương đối nhanh, dễ dàng và sâu sắc trong những điều kiện như nhau.

Cũng theo V.A.Cruchetxki [1]: Có 8 đặc điểm hoạt động trí tuệ của HS có năng lực Toán học là:

- Khả năng tri giác có tính chất hình thức hoá tài liệu toán học, gắn liền với sự thâu tóm nhanh chóng các cấu trúc hình thức của chúng trong một bài toán cụ thể vào trong một biểu thức toán học.

- Khả năng tư duy có tính khái quát hoá nhanh và rộng.

- Xu thế suy nghĩ bằng những suy lý rút gọn.

- Sự tư duy lôgíc lành mạnh.

- Tính linh hoạt cao của các quá trình tư duy thể hiện ở:

+ Sự xem xét cách giải các bài toán theo nhiều khía cạnh khác nhau.

+ Sự di chuyển dễ dàng và tự do từ một thao tác trí tuệ này sang một thao tác trí tuệ khác, từ tiến trình suy nghĩ thuận sang tiến trình suy nghĩ nghịch.

- Xu hướng tìm tới cách giải tối ưu cho một vấn đề toán học, khát vọng tìm ra lời giải rõ ràng, đơn giản, hợp lý, tiết kiệm.

- Trí nhớ có tính chất khái quát về các kiểu bài toán, các phương thức giải, sơ đồ lập luận, sơ đồ lôgic.

- Khả năng tư duy lôgic, trừu tượng phát triển tốt.

1.2.3. Khái niệm về năng lực giải toán và phát triển năng lực giải toán

Năng lực giải toán là một phần của năng lực toán học, là khả năng áp dụng tiến trình thực hiện việc giải quyết một vấn đề có tính hướng đích cao, đòi hỏi huy động khả năng tư duy tích cực và sáng tạo, nhằm đạt được kết quả sau một số bước thực hiện [10]. Như vậy, một người được coi là có năng lực giải toán nếu người đó nắm vững tri thức, có kĩ năng, kĩ xảo của hoạt động giải toán và đạt được kết quả tốt hơn, cao hơn so với trình độ trung bình của những người khác cũng tiến hành hoạt động giải toán đó trong những điều kiện và hoàn cảnh tương đương. Từ đặc điểm hoạt động trí tuệ của những HS có năng lực toán học và khái niệm về năng lực giải toán, chúng ta có thể rút ra một số đặc điểm và cấu trúc của năng lực giải toán đó là:

- Khả năng lĩnh hội nhanh chóng quy trình giải một bài toán và các yêu cầu của một lời giải, biết trình bày lời giải rõ ràng và đẹp đẽ.

- Sự phát triển mạnh của tư duy lôgic, tư duy sáng tạo thể hiện ở khả năng lập luận chính xác, về quan hệ giữa các dữ kiện của bài toán.

- Có năng lực phân tích, tổng hợp trong lĩnh vực thao tác với các ký hiệu, ngôn ngữ toán học. Khả năng chuyển đổi từ điều kiện của bài toán sang ngôn ngữ: Ký hiệu, quan hệ, phép toán giữa các đại lượng đã biết, chưa biết và ngược lại.

- Có tính độc lập và độc đáo cao trong khi giải toán và sự phát triển của năng lực giải quyết vấn đề.

- Có tính tích cực, kiên trì về mặt ý chí và khả năng huy động trí óc cao trong lao động giải toán.

- Khả năng tìm tòi nhiều lời giải, huy động nhiều kiến thức cùng lúc vào việc giải bài tập, từ đó lựa chọn được lời giải tối ưu.

- Có khả năng kiểm tra các kết quả đã đạt được và hình thành được một số kiến thức mới thông qua hoạt động giải toán, tránh được những nhầm lẫn trong quá trình giải toán.

- Có khả năng nêu ra được một số những bài tập tương tự cùng với cách giải (có thể là định hướng giải, quy trình có tính thuật toán, thuật toán để giải bài toán đó).

- Có khả năng khái quát hoá từ bài toán cụ thể đến bài toán tổng quát, từ bài toán có một số yếu tố tổng quát đến bài toán có nhiều yếu tố tổng quát, nhờ các thao tác trí tuệ: Phân tích, so sánh, tổng hợp, tương tự, trừu tượng, hệ thống hoá và đặc biệt hoá.

Bàn về năng lực, cũng có ý kiến cho rằng: Năng lực là do thượng đế ban cho. Song nhiều ý kiến cho rằng đó chỉ là một phần nhỏ, còn phần nhiều là do sự tích luỹ, sự bồi đắp, sự học hỏi, rèn luyện, phát triển mà có. Qua quá trình học tập HS sẽ được bổ sung các kiến thức, được trang bị các phương pháp, từ đó năng lực giải toán được tăng lên. Một phần do HS phải có ý thức tự tăng thêm năng lực cho mình, một phần do các thầy cô giáo hướng dẫn, rèn luyện, phát triển. Chính vì vậy, chúng tôi rất đề cao các biện pháp nhằm phát triển năng lực giải toán cho HS.

Trong bài tổng luận của tác giả Trần Thúc Trình "Nhìn lại lịch sử cải cách nội dung và phương pháp dạy - học toán ở trường phổ thông trên thế giới trong thế kỉ XX" [6], tác giả đã đưa ra mười chỉ tiêu năng lực là:

- Năng lực phát triển và tái hiện những định nghĩa, kí hiệu, các phép toán, các khái niệm.
- Năng lực tính nhanh và cẩn thận, sử dụng đúng các kí hiệu.
- Năng lực dịch chuyển các dữ kiện thành kí hiệu.
- Năng lực biểu diễn dữ kiện thành kí hiệu.
- Năng lực theo dõi một hướng suy luận hay chứng minh.
- Năng lực xây dựng một chứng minh.
- Năng lực giải một bài toán đã toán học hoá.
- Năng lực giải một bài toán chưa toán học hoá.
- Năng lực khái quát hoá toán học.
- Năng lực phân tích bài toán, xác định các phép toán có thể áp dụng để giải.

Do đặc thù của bộ môn toán nên hoạt động giải toán là hoạt động không thể thiếu được của người học toán, dạy toán và nghiên cứu về toán. Trong cuốn "Sáng tạo toán học" G.Polya đã viết: "... quá trình giải toán là đi tìm kiếm một lối thoát ra khỏi khó khăn hoặc một con đường vượt qua trở ngại, đó chính là quá trình đạt tới một mục đích mà thoạt nhìn giường như không thể đạt được ngay. Giải toán là khả năng riêng biệt của trí tuệ, còn trí tuệ chỉ có ở con người. Vì vậy, giải toán có thể xem như một trong những biểu hiện đặc trưng nhất trong hoạt động của con người...'' [16]. Trong khi say mê giải toán, trí tuệ con người được huy động tới mức tối đa, khả năng phân tích và tổng hợp được rèn luyện, phát triển, tư duy trở nên nhanh nhẹn. Bài toán mà chúng ta có thể bình thường không giải được nhưng nó có khêu gợi tính tò mò và buộc ta phải sáng tạo và nếu tự mình giải bài toán đó thì ta có thể biết được cái quyến rũ của sự sáng tạo cùng niềm vui thắng lợi. Một điểm chú ý nữa là: "Trong quá trình giải bài tập toán cần khuyến khích HS tìm nhiều cách giải cho một bài toán. Mọi cách giải đều dựa vào một số đặc điểm nào đó của dữ kiện, cho nên tìm được nhiều cách giải là luyện tập cho HS biết cách nhìn nhận một vấn đề theo nhiều khía cạnh khác nhau, điều đó rất bổ ích cho việc phát triển năng lực tư duy. Mặt khác, việc tìm được nhiều cách giải thì sẽ tìm được cách giải hay nhất, đẹp nhất..." [6].

Tóm lại, phát triển năng lực giải toán cho HS, phương pháp tốt nhất là với một nội dung cụ thể cần có những biện pháp cụ thể để giúp HS nắm vững tri thức, phát triển tư duy, hình thành kĩ năng, kĩ xảo ứng dụng toán học vào thực tiễn.

1.2.4. Một số biểu hiện của năng lực giải toán của HS THPT

Từ đặc điểm hoạt động trí tuệ của những HS có năng lực toán học và khái niệm về năng lực giải toán chúng ta có thể rút ra một số biểu hiện của năng lực giải toán của HS THPT như sau:

- HS có khả năng lĩnh hội quy trình giải một bài toán và một số yêu cầu của một lời giải, biết trình bày lời giải rõ ràng, mạch lạc.

- Sự phát triển ở khả năng lập luận, về quan hệ giữa các dữ kiện, giả thiết của bài toán.

- Năng lực phân tích, tổng hợp vấn đề với các ký hiệu, ngôn ngữ toán học. Thể hiện qua khả năng chuyển đổi từ điều kiện của bài toán sang ngôn ngữ: Ký hiệu, quan hệ, phép toán giữa các đại lượng đã biết, chưa biết và ngược lại.

- Tính tích cực, kiên trì về mặt ý chí và khả năng tập trung trong giải toán.

- Khả năng tìm tòi thêm lời giải, huy động nhiều kiến thức cùng lúc vào việc giải bài tập, từ đó lựa chọn được lời giải tối ưu để giải quyết bài toán.

- Khả năng tính toán, kiểm tra các kết quả đã đạt được, tránh được những nhầm lẫn trong quá trình giải toán.

- Khả năng nêu ra được một số những bài tập tương tự cùng với cách giải (có thể là định hướng giải, hoặc quy trình có tính thuật toán, hoặc thuật toán để giải bài toán đó).

- Khả năng phân tích, phản biện hoặc tổng hợp kiến thức từ bài toán cụ thể đến bài toán tổng quát, từ bài toán có một số yếu tố tổng quát đến bài toán có nhiều yếu tố tổng quát, nhờ các thao tác trí tuệ như phân tích, so sánh, tổng hợp, tương tự, trừu tượng, hệ thống hoá, đặc biệt hoá…

1.3. Thực tiễn dạy học PT chứa căn thức ở trường THPT

1.3.1. Điều tra thực trạng dạy học PT chứa căn thức cho học sinh THPT

Để khảo sát về tình hình dạy học và việc phát triển năng lực giải PT chứa căn thức ở trường phổ thông, luận văn đã sử dụng các phương pháp quan sát, điều tra: dự giờ, phỏng vấn, hỏi ý kiến các GV trong trường phổ thông, phiếu điều tra.

1.3.1.1. Điều tra từ giáo viên

Để biết được tình hình thực tế của việc rèn luyện kĩ năng, phát triển năng lực giải toán phương trình chứa căn thức cho HS, tôi đã thiết kế và gửi phiếu xin ý kiến của 9 thầy cô giáo trong tổ Toán-Tin của trường THPT Mộc Lỵ, huyện Mộc Châu, tỉnh Sơn La. *Nội dung phiếu xin xem trong phụ lục 1.*

Kết quả như sau:

+ Trong câu hỏi 1 - Theo thầy cô giáo dạng toán giải phương trình chứa căn thức là dạng toán quan trọng hay không? Vì sao?

A. Bình thường

B. Quan trọng

C. Rất quan trọng

Có 11,1% thầy cô chọn đáp án A; 33,3% chọn đáp án B; 55,6% chọn đáp án C vì: Thứ nhất giúp HS củng cố và khắc sâu kiến thức dễ dàng, thứ 2 giúp cho HS có kĩ năng giải các bài toán giải phương trình chứa căn thức trong kỳ thi THPT Quốc gia.

+ Trong câu hỏi 2 - Theo thầy cô chỉ rèn luyện kĩ năng giải phương trình chứa căn thức cho HS theo mức độ sách giáo khoa, sách bài tập thì HS có đủ kĩ năng làm bài thi THPT quốc gia không?

A. Chưa đủ

B. Đã đủ

Đa số các thầy cô trả lời là HS không đủ kỹ năng để làm được bài toán giải phương trình chứa căn thức trong đề thi THPT quốc gia.

+ Trong câu hỏi 3 - Theo thầy cô với số tiết quy định trong chương trình thì HS của thầy cô đã giải phương trình chứa căn thức ở mức độ nào?

A. Chưa biết giải phương trình chứa căn thức

B. Chỉ giải được những bài toán đơn giản

C. Giải thành thạo những bài toán kể cả những bài khó trong quá trình học

Đa số các thầy cô trả lời số tiết theo quy định trong chương trình của HS chỉ giải phương trình chứa căn thức ở mức độ biết làm, ít HS làm được bài một cách thành thạo.

+ Trong câu hỏi 4 - Theo thầy cô những khó khăn nào sau đây được thể hiện nhiều nhất ở HS?

A. Không biết nhận dạng

B. Không biết cách giải

C. Có biết cách giải nhưng không giải được.

Có 33,3% thầy cô chọn đáp án A, 44,4% chọn đáp án B, 22,3% chọn đáp án C.

1.3.1.2. Đánh giá kỹ năng giải phương trình chứa căn thức của học sinh qua bài kiểm tra

Tác giả đã đưa ra một bài kiểm tra viết 45 phút để đánh giá kĩ năng giải phương trình chứa căn thức của 86 học sinh hai lớp 10A3 và 10A4 trường THPT Mộc Ly.

Đề bài như sau: Giải các phương trình sau:

1) $\sqrt{25-x^2}=x-1$

2) $\sqrt{3x^2-9x+1}+2=x$

3) $2(x^2-2x)+\sqrt{x^2-2x-3}-9=0$

Dụng ý của tác giả là:

Bài 1: nhằm đánh giá kĩ năng vận dụng giải PT căn thức cơ bản

Bài 2: nhằm đánh giá kĩ năng tìm ra cách giải PT không cơ bản, ở mức trung bình, giải bằng một trong những cách quen thuộc như biến đổi tương đương…

Bài 3: nhằm đánh giá khả năng sáng tạo, tìm ra cách giải độc đáo.

Lời giải bài kiểm tra xin xem tại phụ lục 3.

Kết quả sau khi chấm bài như sau:

Bài 1 có 75,6 % học sinh giải được

Bài 2 có 22,4 % học sinh giải được

Bài 3 không có học sinh giải được

Kết quả trên cho thấy kĩ năng giải phương trình chứa căn thức của học sinh nhìn chung mới đạt ở mức độ cơ bản. Với phương trình đòi hỏi ở mức độ cao hơn cơ bản một chút thì hầu như học sinh không giải được.

1.3.2. Đánh giá về việc dạy học giải PT chứa căn thức và việc phát triển năng lực cho HS

Thông qua những giờ dạy, giờ dự giờ và qua ý kiến thăm dò, khảo sát một số GV, HS cho thấy thực trạng dạy học PT chứa căn thức hiện nay bên cạnh những thuận lợi, còn có những khó khăn tồn tại, việc phát triển năng lực cho HS vẫn chưa thực sự đạt hiệu quả, mặc dù đã có nhiều định hướng, phương pháp dạy học tích cực nhưng chất lượng đạt được vẫn còn khiêm tốn. Điều đó do còn nhiều nguyên nhân, cả khách quan lẫn chủ quan:

Thứ nhất, xuất phát từ sự tồn tại của phương pháp dạy học cũ, lấy người dạy làm trung tâm, truyền thụ kiến thức một chiều dưới dạng có sẵn, thuyết trình tràn lan, thầy áp đặt, trò thụ động, …

Thứ hai, hệ thống bài tập được đưa ra chưa thật phong phú, nội dung cũng như hình thức còn khá đơn giản; nội dung bài tập chưa thực sự phù hợp với năng lực từng đối tượng HS nên chưa kích thích được ham muốn học tập của các em.

Thứ ba, việc thực hành làm bài tập trên lớp và luyện tập ở nhà của HS còn mang tính hình thức, đối phó.

Thứ tư, năng lực giải bài toán PT chứa căn thức nói riêng cũng như giải PT nói chung của HS còn hạn chế; năng lực học toán của HS trong một lớp cũng chưa đồng đều, còn nhiều em chưa yêu thích môn toán.

Thứ năm, việc phát triển và phát triển năng lực giải toán cho HS chưa được quan tâm đúng mức nên HS chưa chủ động, tích cực tiếp nhận và học tập, chưa vận dụng linh hoạt các kiến thức đã học vào giải bài tập.

Từ thực tiễn đề ra yêu cầu cấp thiết rằng chúng ta cần quan tâm hơn nữa tới việc phát triển năng lực giải toán cho HS.

1.4. Tiểu kết chương 1

Chương 1 của luận văn đã trình bày về:

1. Vị trí, vai trò của bài tập toán trong việc hình thành năng lực cho HS, các phương pháp chung để giải bài tập toán và việc bồi dưỡng năng lực giải toán thông qua dạy học giải bài tập toán.

2. Khái niệm năng lực, năng lực toán học và năng lực giải bài tập toán của HS THPT.

3. Thực tiễn dạy học giải toán ở trường phổ thông và việc phát triển năng lực giải toán PT chứa căn thức cho HS.

Từ việc nghiên cứu những cơ sở lí luận này, đồng thời chỉ ra những thuận lợi, khó khăn của GV và HS trong dạy học giải PT chứa căn thức theo định hướng phát triển năng lực, chúng tôi đưa ra những vận dụng của mình vào xây dựng các biện pháp phát triển năng lực giải PT chứa căn thức cho HS THPT trong chương 2.

Chương 2. MỘT SỐ BIỆN PHÁP PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC GIẢI TOÁN CHO HỌC SINH THPT TRONG DẠY HỌC CHỦ ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

2.1. Định hướng việc xây dựng và thực hiện các biện pháp phát triển năng lực giải toán cho HS

- Các biện pháp được xây dựng dựa trên nền tảng tri thức chuẩn của SGK THPT hiện hành.

- Các biện pháp xây dựng cần đảm bảo tính hệ thống.

- Các biện pháp cần đảm bảo tạo ra khó khăn đúng mức, kích thích hứng thú học tập cho HS, nhằm phát huy tính tích cực và năng lực trí tuệ của HS.

- Các biện pháp đề xuất phải đảm bảo tính khả thi, hiệu quả và ứng dụng được trong thực tiễn dạy học.

2.2. Các biện pháp phát triển năng lực giải toán PT chứa căn thức cho HS THPT

2.2.1. Biện pháp 1: Trang bị và tập luyện cho học sinh các phương pháp thường áp dụng để giải PT chứa căn thức

*** Cơ sở thực hiện biện pháp:**

Ngoài một số PT đã có sẵn thuật giải, các bài tập không có sẵn thuật giải chiếm một phần không nhỏ, gây cho HS không ít trở ngại. Vì vậy, cần cung cấp cho HS một số phương pháp cơ bản để HS định hướng tìm ra lời giải của bài toán.

*** Cách thức thực hiện biện pháp:**

- Trang bị cho HS tri thức phương pháp.

- Hướng dẫn HS thực hành phương pháp giải PT chứa căn thức qua một số ví dụ.

- Rèn luyện cho HS cách thức nhận dạng được phương pháp giải đối với một số PT chứa căn thức thường gặp.

- Giải PT chứa căn thức theo các phương pháp đã biết một cách thành thạo.

2.2.1.1. Phương pháp nâng lên lũy thừa

Ta có hai phép nâng lên lũy thừa:

- Nâng lũy thừa bậc lẻ:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^n = [g(x)]^n$, n là số lẻ, $n \geq 3$

- Nâng lũy thừa bậc chẵn:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} [f(x)]^n = [g(x)]^n \\ f(x),\ g(x) \geq 0 \end{cases}$, n là số chẵn, $n \geq 2$

Hai trường hợp phổ biến nhất mà ta dùng phương pháp lũy thừa đó là nâng lũy thừa bậc 2 và nâng lũy thừa bậc 3; trong đó đặc biệt chú ý đến phương pháp nâng lũy thừa bậc 2.

1) Dạng 1: $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \ \ (g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

VD 1: Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 69x + 27} = \sqrt{x^2 + 96x + 2}$

Giải:

$$\sqrt{3x^2 + 69x + 27} = \sqrt{x^2 + 96x + 2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 96x + 2 \geq 0 \quad (1) \\ 3x^2 + 69x + 27 = x^2 + 96x + 2 \ \ (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 96x + 2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{25}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{25}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $\Leftrightarrow x = 1,\ x = \dfrac{25}{2}$

Nhận xét:

- Trong lời giải chỉ dùng phép biến đổi tương đương, không cần đặt điều kiện

- Nếu đặt điều kiện ngay từ ban đầu thì ta sẽ trình bày như sau:

Điều kiện: $\begin{cases} 3x^2 + 69x + 27 \geq 0 \\ x^2 + 96x + 2 \geq 0 \end{cases}$ (*)

Phương trình lúc đó tương đương với:

$$3x^2 + 69x + 27 = x^2 + 96x + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{25}{2} \end{array} \right.$$

Đối chiếu với điều kiện thấy 2 giá trị trên đều thỏa mãn. Vậy phương trình có hai nghiệm: $\Leftrightarrow x = 1,\ x = \dfrac{25}{2}$

Sở dĩ trong lời giải sử dụng phép biến đổi tương đương chỉ cần điều kiện (1) mà không cần điều kiện $3x^2 + 69x + 27 \geq 0$ là vì (2) đã đảm bảo điều này: Từ (2) ta có $3x^2 + 69x + 27 = x^2 + 96x + 2$, mặt khác (1) lại cho ta $x^2 + 96x + 2 \geq 0$ nên hoàn toàn ta có thể suy ra: $3x^2 + 69x + 27 \geq 0$. Đây chính là cơ sở không cần dùng thêm điều kiện $3x^2 + 69x + 27 \geq 0$ khi biến đổi tương đương (nếu đưa thêm vào thì chỉ ***thừa*** chứ không sai)

Khi trình bày ta có thể chọn điều kiện: $3x^2 + 69x + 27 \geq 0$ hay $x^2 + 96x + 2 \geq 0$ là tùy, miễn ta thấy điều kiện ngắn gọn, dễ giải hoặc dễ thử. Đây là trường hợp giải phương trình (2) đơn giản. Nếu trong trường hợp khác giải phương trình thu được sau khi bình phương qua nhiều công đoạn, trình bày qua nhiều bước biến đổi thì ta nên đặt điều kiện để việc trình bày lời giải gọn gàng hơn.

VD 2: Giải phương trình

$$\sqrt{x^3 - x^2 + 3} = \sqrt{3x + 1}$$

Nhận xét: Giữa hai điều kiện $x^3 - x^2 + 3 \geq 0$ và $3x + 1 \geq 0$ thì rõ ràng điều kiện $3x + 1 \geq 0$ gọn hơn và dễ giải hơn.

Giải:

$$\sqrt{x^3 - x^2 + 3} = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x^3 - x^2 + 3 = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ x^3 - x^2 + 3 = 3x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ (x-2)(x^2 + x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 2,\ x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

VD 3: Giải phương trình $\sqrt{x(x-1)^2} = \sqrt{x^2 + 7x}$

Giải:

$$\sqrt{x(x-1)^2} = \sqrt{x^2 + 7x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7x \geq 0 \\ x(x-1)^2 = x^2 + 7x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7x \geq 0 \\ x(x^2 - 3x - 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -7 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3 + \sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$$

Nhận xét:

- Việc dùng điều kiện $x^2 + 7x \geq 0$ là hoàn toàn hợp lý.

- Một số sai lầm có thể mắc phải khi biến đổi phương trình trên:

+ Vội vàng phát hiện nhân tử mà chưa đặt điều kiện:

$$\sqrt{x(x-1)^2} = \sqrt{x^2 + 7x} \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{(x-1)^2} - \sqrt{x+7}\right) = 0$$

Muốn tách được $\sqrt{x^2+7x}=\sqrt{x}\sqrt{x+7}$ cần có điều kiện là $x\ge 0$. Như vậy cần phải tìm điều kiện trước: $\begin{cases} x(x-1)^2\ge 0 \\ x^2+7x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -7\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 0$

+ Tìm được điều kiện $x\ge 0$ nhưng lại vội vàng khai căn:

$\sqrt{x(x-1)^2}=\sqrt{x^2+7x} \Leftrightarrow \sqrt{x}(x-1)=\sqrt{x}\sqrt{x+7}$

Khi gặp biểu thức dạng: $\sqrt{A.B^2}$ thì điều kiện xác định là $\left[\begin{array}{l} B=0 \\ A\ge 0\end{array}\right.$

Với bài toán này thì điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x(x-1)^2}$ là $\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\ge 0$

Điều kiện này chưa khẳng định được $(x-1)$ âm hay dương, nên ta sử dụng phép biến đổi $\sqrt{B^2}=|B|$ cụ thể là: $\sqrt{x(x-1)^2}=\sqrt{x}|x-1|$

* Để thấy được tầm quan trọng của điều kiện $B=0$ nói trên ta xét một biểu thức khác, chẳng hạn: $\sqrt{x(x+2)^2}$

Điều kiện xác định của căn thức: $\left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ x\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x\ge 0\end{array}\right.$

Vậy nếu dùng phép biến đổi: $\sqrt{x(x+2)^2}=\sqrt{x}|x+2|$ là sai, bởi vì tại $x=-2$ thì căn thức $\sqrt{x(x+2)^2}$ xác định nhưng $\sqrt{x}$ không xác định.

2) Dạng 2: $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)=[g(x)]^2\end{cases}$

Đối với dạng PT này, điều kiện xác định của PT là $f(x)\ge 0$. Trong phép biến đổi trên điều kiện này đã thỏa mãn: $f(x)=[g(x)]^2\ge 0$

VD 4: Giải phương trình

$\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$

Giải:

$$\sqrt{4+2x-x^2}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0 \\ 4+2x-x^2=(x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x=0 \vee x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

VD 5: Giải phương trình sau $\sqrt{x^2+5x+\sqrt{x^3+2x+1}}=x+1$

Giải:

$$\sqrt{x^2+5x+\sqrt{x^3+2x+1}}=x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x^2+5x+\sqrt{x^3+2x+1}=\left(x+1\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \sqrt{x^3+2x+1}=1-3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 1-3x\ge 0 \\ x^3+2x+1=\left(1-3x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le \frac{1}{3} \\ x^3-9x^2+8x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le \frac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Vậy PT có một nghiệm $x=0$

3) Dạng 3: $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=h(x)$

VD 6: Giải phương trình $\sqrt{x-1}=5-2\sqrt{3x-2}$

Phân tích:

Việc đầu tiên ta làm là đi tìm điều kiện xác định. Vì chưa chắc vế phải âm hay dương, nên nếu bình phương hai vế thì sẽ cần thêm điều kiện $2\sqrt{3x-2} \le 5$, còn nếu chuyển vế $2\sqrt{3x-2}$ sang vế phải thì lúc đó thu được vế phải là tổng hai căn thức; khi đó hai vế đều không âm nên có thể thực hiện phép bình phương.

Giải:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \ge 1 \\ 3x-2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{3x-2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{3x-2}\right)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (x-1) + 4\sqrt{(x-1)(3x-2)} + 4(3x-2) = 25$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{(x-1)(3x-2)} = 34 - 13x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 34 - 13x \ge 0 \\ 16(x-1)(3x-2) = (34-13x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{34}{13} \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{562}{121} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét: Khi gặp phương trình dạng $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$ thì ta nên chuyển vế sao cho thu được hai vế đều không âm, từ đó thực hiện phép bình phương để khỏi rườm rà thêm điều kiện.

VD 7: Giải phương trình $\sqrt{x+3} = 5 - \sqrt{x-2}$

Giải:

Với điều kiện $x \geq 2$. Ta có:

$$\sqrt{x+3} = 5 - \sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 5$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 + 2.\sqrt{(x+3)(x-2)} = 25$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(x-2)} = 12 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 12 \\ x^2 + x - 6 = 144 + x^2 - 24x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 12 \\ 25x = 150 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$$

Vậy: phương trình đã cho có một nghiệm x = 6

4) Dạng 4: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$

Giải phương trình: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$, trong đó $f(x), g(x), h(x)$ là các đa thức có bậc không vượt quá 2.

Phương pháp giải:

- Tìm điều kiện xác định.

- Biến đổi phương trình:

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2.\sqrt{f(x)g(x)} = h(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ 2\sqrt{f(x).g(x)} = h(x) - f(x) - g(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ h(x) - f(x) - g(x) \geq 0 \\ 4f(x).g(x) = \left[h(x) - f(x) - g(x)\right]^2 \quad (*) \end{cases}$$

Do $f(x), g(x), h(x)$ là các đa thức có bậc không vượt quá 2 nên phương trình (*) là phương trình có bậc cao nhất là bậc 4

VD 8: Giải phương trình $\sqrt{2x^2+10x+12} - \sqrt{x^2+2x-3} = 2\sqrt{x+2}$

Phân tích:

Ta nhận thấy, phương trình có dạng chứa 3 căn thức và trong 3 căn thức này đều là đa thức có bậc không vượt quá 2. Nếu ta để nguyên phương trình như vậy mà bình phương thì cần đặt điều kiện, đồng thời sau khi bình phương sẽ thu được số hạng chứa căn là $\sqrt{\left(2x^2+10x+12\right)\left(x^2+2x-3\right)}$, tiếp tục cần một lần bình phương nữa thì sẽ mất thời gian khai triển $\left(2x^2+10x+12\right)\left(x^2+2x-3\right)$. Còn nếu ta chuyển $\sqrt{x^2+2x-3}$ sang vế phải rồi bình phương thì thuận lợi hơn ở 2 điều: thứ nhất bình phương lên không cần bổ sung thêm điều kiện, thứ hai là biểu thức trong căn là $\left(x^2+2x-3\right)(x+2)$, dễ khai triển hơn so với biểu thức trên.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2+10x+12 \geq 0 \\ x^2+2x-3 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq -2 \end{array}\right. \\ x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$

Khi đó phương trình tương đương với:

$\sqrt{2x^2+10x+12}=\sqrt{x^2+2x-3}+2\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+10x+12}=\left(\sqrt{x^2+2x-3}+2\sqrt{x+2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2x^2+10x+12=\left(x^2+2x-3\right)+4\left(x+2\right)+4\sqrt{(x^2+2x-3)(x+2)}$

$\Leftrightarrow 2x^2+10x+12=x^2+6x+5+4\sqrt{\left(x^2+2x-3\right)\left(x+2\right)}$

$\Leftrightarrow x^2+4x+7=4\sqrt{\left(x^2+2x-3\right)\left(x+2\right)}$

$\Leftrightarrow \left(x^2+4x+7\right)^2=16\left(x^2+2x-3\right)\left(x+2\right)$ (do $x^2+4x+7>0$)

$\Leftrightarrow x^4+16x^2+49+8x^3+14x^2+56x=16\left(x^3+2x^2+2x^2+4x-3x-6\right)$

$\Leftrightarrow x^4-8x^3-34x^2+40x+145=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5\right)\left(x^2-8x-29\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5=0 \\ x^2-8x-29=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{5} \\ x=4\pm 3\sqrt{5} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta kết luận phương trình có hai nghiệm là:

$$x=\sqrt{5},\ x=4+3\sqrt{5}$$

VD 9: Giải phương trình: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7}=\sqrt{12-x}$

Giải:

Với điều kiện $7\le x\le 12$. Ta có:

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7}=\sqrt{12-x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{12-x}+\sqrt{x-7}$

$\Leftrightarrow x+1=5+2\sqrt{(12-x)(x-7)}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{19x - x^2 - 84} = x - 4$

$\Leftrightarrow 4(19x - x^2 - 84) = x^2 - 8x + 16$

$\Leftrightarrow 76x - 4x^2 - 336 - x^2 + 8x - 16 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 5x^2 - 84x + 352 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{44}{5},\ x = 8$

Vậy: phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{44}{5},\ x = 8$

VD 10: Giải phương trình $\sqrt{10 - x} - \sqrt{3x - 2} = \sqrt{2x}$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} 10 - x \ge 0 \\ 3x - 2 \ge 0 \\ 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 10 \\ x \ge \dfrac{2}{3} \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \le x \le 10$

$\sqrt{10 - x} - \sqrt{3x - 2} = \sqrt{2x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{10 - x} = \sqrt{3x - 2} + \sqrt{2x}$

$\Leftrightarrow 10 - x = \left(\sqrt{3x - 2} + \sqrt{2x}\right)^2$

$\Leftrightarrow 10 - x = 5x - 2 + 2\sqrt{2x\left(3x - 2\right)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{6x^2 - 4x} = 6 - 3x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 3x \ge 0 \\ 6x^2 - 4x = \left(6 - 3x\right)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ 6x^2 - 4x = 36 - 36x + 9x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ 3x^2 - 32x + 36 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x = \dfrac{16 \pm 2\sqrt{37}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{16 - 2\sqrt{37}}{3}$$

Nhận xét:

Lời giải trên sử dụng phép chuyển vế thích hợp để thu được hai vế không âm rồi mới bình phương.

Sai lầm thường gặp đó là bình phương ngay từ đầu mà không đặt điều kiện:

- Biến đổi sai:

$$\sqrt{10-x} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{2x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{10-x} - \sqrt{3x-2}\right)^2 = 2x$$

(do chưa biết vế trái mang dấu âm hay dấu dương)

- Biến đổi đúng:

$$\sqrt{10-x} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{10-x} - \sqrt{3x-2} \ge 0 \\ \left(\sqrt{10-x} - \sqrt{3x-2}\right)^2 = 2x \end{cases}$$

Nếu muốn bình phương ngay từ đầu không đặt điều kiện thì phải dùng phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả:

$$\sqrt{10-x} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{2x} \Rightarrow \left(\sqrt{10-x} - \sqrt{3x-2}\right)^2 = 2x$$

Khi tìm được nghiệm phải thử lại phương trình ban đầu.

VD 11: Giải phương trình $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$

Giải:

Điều kiện: $x \ge \dfrac{2}{3}$. Với điều kiện này PT đã cho tương đương với :

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow x + 3 = 5x - 3 + 2\sqrt{6x^2 - 7x + 2}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2x = \sqrt{6x^2 - 7x + 2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{3}{2} \\ 9 - 12x + 4x^2 = 6x^2 - 7x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} \le x \le \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

5) Dạng 5: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)}$

VD 12: Giải phương trình: $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} - \sqrt{x-4} + \sqrt{x+9} = 0$

Giải:

Với điều kiện $x \ge 4$. Ta có:

$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} - \sqrt{x-4} + \sqrt{x+9} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+9} + \sqrt{x} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow 2x + 9 + 2\sqrt{x(x+9)} = 2x - 5 + 2\sqrt{(x-4)(x-1)}$

$\Leftrightarrow 7 + \sqrt{x(x+9)} = \sqrt{(x-1)(x-4)}$

$\Leftrightarrow 49 + x^2 + 9x + 14\sqrt{x(x+9)} = x^2 - 5x + 4$

$\Leftrightarrow 45 + 14x + 14\sqrt{x(x+9)} = 0$

Với $x \ge 4 \Rightarrow$ vế trái của phương trình luôn là một số dương $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

2.2.1.2. Phương pháp trị tuyệt đối hóa

VD 13: Giải phương trình

$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \dfrac{x+3}{2}$

Nhận xét:

$$x + 2\sqrt{x-1} = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1^2 = \left(\sqrt{x-1} + 1\right)^2$$

$$x - 2\sqrt{x-1} = x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1^2 = \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2$$

Giải:

Điều kiện: $x \geq 1$

Khi đó PT (2) $\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right| + \left|\sqrt{x-1}-1\right| = \dfrac{x+3}{2}$

Do $\sqrt{x-1}+1 \geq 0 \Rightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right| = \sqrt{x-1}+1$

Còn $\left|\sqrt{x-1}-1\right| = \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}-1;\ x \geq 2 \\ 1-\sqrt{x-1};\ 1 \leq x < 2\end{array}\right.$

Do đó:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}2\sqrt{x-1} = \dfrac{x+3}{2}; & x \geq 2 \\ 2 = \dfrac{x+3}{2} & ;1 \leq x < 2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}16(x-1) = (x+3)^2; & x \geq 2 \\ 4 = x+3 & ;1 \leq x < 2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x^2 - 10x + 25 = 0; & x \geq 2 \\ x = 1 & ;1 \leq x < 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 5 \\ x = 1\end{array}\right.$$

Vậy PT có 2 nghiệm là $x = 5$ và $x = 1$

Lưu ý: Trong PT trên nếu không tìm ra điểm đặc biệt của biểu thức dưới dấu căn thì việc giải PT theo các cách thông thường là rất khó khăn. Như vậy khi gặp một PT có hình thức phức tạp, có nhiều dấu căn lồng vào nhau thì việc tìm ra mối liên hệ giữa các biểu thức, các số hạng có mặt trong PT là rất cần thiết, bởi vì chúng có thể dẫn đến các hằng đẳng thức. Điều nay giúp ta loại bỏ bớt dấu căn. Đưa PT trở nên đơn giản hơn.

Mỗi bài toán đều có một mầu sắc riêng và chúng luôn chứa đựng một dấu hiệu riêng biệt. Do đó nó đòi hỏi ở người giải phải có các năng lực như phân tích, tổng hợp, tương tự hoá, suy luận lôgic để tìm ra điểm đặc biệt của bài toán. Điều này sẽ dẫn người giải đến con đường đúng đắn và ngắn gọn nhất cho bài toán.

VD 14: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-4x+4}+x=8$ (1)

Giải:

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}=8-x$

Điều kiện có nghiệm của PT: $x\le 8$. Ta có:

$$\sqrt{(x-2)^2}=8-x \Leftrightarrow |x-2|=8-x \quad (*)$$

Nếu $x<2$: (*) $\Leftrightarrow 2-x=8-x$ (vô nghiệm)

Nếu $2\le x\le 8$: (*) $\Leftrightarrow x-2=8-x \Leftrightarrow x=5$

PT có một nghiệm $x=5$

VD 15: Giải phương trình

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$$

Giải:

Điều kiện: $x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -1$

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=2\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1+2\sqrt{x+1}+1}+\sqrt{x+1-2.3\sqrt{x+1}+9}=2\sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+1+|\sqrt{x+1}-3|=2.|\sqrt{x+1}-1|$$

Đặt $y=\sqrt{x+1}$ $(y\ge 0)$, phương trình đã cho trở thành:

$$y+1+|y-3|=2|y-1|$$

- Nếu $0\le y<1$: $y+1+3-y=2-2y \quad \Leftrightarrow y=-1$ (loại)

- Nếu $1\le y\le 3$: $y+1+3-y=2y-2 \quad \Leftrightarrow y=3$

- Nếu $y>3$: $y+1+y-3=2y-2$ (vô nghiệm)

Với $y=3$: $\sqrt{x+1}=3 \Leftrightarrow x+1=9 \Leftrightarrow x=8$

PT đã cho có một nghiệm là $x=8$.

2.2.1.3. Phương pháp đánh giá

Với các bài toán mà dạng của chúng không mẫu mực, ta không thể dùng các phép biến đổi thông thường để giải. Người ta phải sử dụng công cụ đồ thị hoặc nghiên cứu các tính chất của các biểu thức để tìm cách đánh giá chúng.

1) Dạng 1: Đánh giá bằng tập xác định

VD 16: Giải phương trình $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x(x-1)\geq 0 \\ x(x+2)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ x\geq 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -2 \\ x\geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -2 \\ x=0 \\ x\geq 1 \end{array}\right.$

Thấy ngay $x=0$ là một nghiệm

Với $x\leq -2$:

$$\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x(1-x)}+\sqrt{-x(-x-2)}=2\sqrt{(-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}+\sqrt{-x-2}=2\sqrt{-x}$$

$$\Leftrightarrow 1-x-2-2+2\sqrt{(1-x)(-x-2)}=4(-x)$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x-2}=1-2x$ (với $x\leq -2$, hai vế cùng không âm)

$$\Leftrightarrow 4(x^2+x-2)=1-4x+4x^2$$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{8}$ (loại)

Với $x\geq 1$:

$$(1)\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 2x+1+2\sqrt{(x-1)(x+2)}=4x$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x-2} = 2x-1$

$\Leftrightarrow 4(x^2+x-2) = 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{8}$

PT có hai nghiệm là: $x=0,\ x=\dfrac{9}{8}$.

2) Dạng 2: Đánh giá bằng bất đẳng thức

Bằng cách đánh giá giá trị hai vế của PT, ta tìm các giá trị của đối số để giá trị hai vế đồng thời bằng nhau. Nếu có, các giá trị đó là nghiệm của PT.

VD 17: Giải PT $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} = x^2-6x+11$

Giải:

Điều kiện xác định $2 \le x \le 4$

Ta có $x^2-6x+11 = (x-3)^2+2 \ge 2$

Dấu đẳng thức xẩy ra khi $x=3$.

Còn $\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}\right)^2 \le (1^2+1^2)(x-2+4-x) \le 4$

Dấu đẳng thức xẩy ra khi $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{4-x}{1} \Rightarrow x = 3 \in \left[2;4\right]$

Từ đó $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} \le 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x=3$

Vậy, PT có nghiệm duy nhất là $x=3$

VD 18: Giải PT

$$\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} = 2(x-1)^4(2x^2-4x+1) \ (3)$$

Giải:

Điều kiện $0 \le x \le 2$.

Đặt $t=(x-1)^2$, ta có: $0 \le t \le 1$

PT trở thành:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-t}}+\sqrt{1-\sqrt{1-t}} = 2t^2(2t-1)$$

Nhận thấy: $2t-1\ge 0 \Leftrightarrow t\ge \dfrac{1}{2}$

Bình phương hai vế và rút gọn ta được:

$$1+\sqrt{t}=2t^4(2t-1)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^3\sqrt{t}}=2(2t-1)^2$$

Vì $t\le 1$ nên $\dfrac{1}{t^4}+\dfrac{1}{t^3\sqrt{t}}\ge 2$

Từ đó suy ra: $t=1$. Thay trở lại cách đặt ta được: $x=2$

Vậy nghiệm của phương trình là x = 2

VD 19: Giải PT $\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=4-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases} 2-x^2\ge 0 \\ 2-\dfrac{1}{x^2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}\le |x|\le \sqrt{2}$

PT đã cho tương đương với :

$$(\sqrt{2-x^2}+x)+\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)=4$$

Theo BĐT Bunhiacopski, ta có :

$$\sqrt{2-x^2}+x\le \sqrt{2}.\sqrt{2-x^2+x^2}=2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2}=x \Leftrightarrow x=1$

$$\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\le \sqrt{2}.\sqrt{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{2-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x=1$

$$\Rightarrow (\sqrt{2-x^2}+x)+\left(\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)\le 4$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=1$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$

VD 20: Giải PT $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}(7x^2-x+4)$ (1)

Giải:

Điều kiện : $\left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x\leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

Gọi vế trái và vế phải của (1) theo thứ tự là A, B

Áp dụng BĐT Bunhiacopski cho hai bộ số

$(1,\ 1,\ -x)$ và $(\sqrt{3x^2-1},\ \sqrt{x^2-x},\ \sqrt{x^2+1})$ ta có: $A\leq\sqrt{(x^2+2)(5x^2-x)}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=-1$

Do $\left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x\leq \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$ nên $5x^2-x>0.$

Áp dụng BĐT Côsi, ta có:

$$B=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[5x^2-x+2(x^2+2)\right]\geq\frac{1}{2\sqrt{2}}.2\sqrt{(5x^2-x)2(x^2+2)}=\sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{4}{3} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của PT (1) là $x=-1$

VD 21: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ và áp dụng để giải PT: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức: $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$

Ta có: $2(x-2+4-x)\geq(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x})^2\Rightarrow 2\geq y$

y đạt giá trị lớn nhất bằng 2 $\Leftrightarrow \sqrt{x-2}=\sqrt{4-x} \Leftrightarrow x=3$.

Mặt khác: $x^2-6x+11=(x-3)^2+2\geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Nên $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} = x^2-6x+11$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2 \\ x^2-6x+11=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

VD 22: Tìm các giá trị của m để PT sau có nghiệm:

$$x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})$$

Giải

$x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}=m(\sqrt{5-x}+\sqrt{4-x})$

$\Leftrightarrow (x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x})=m$

Xét hàm số f(x)=$(x\sqrt{x}+\sqrt{x+12})(\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x})$, với miền xác định $0\leq x\leq 4$

Trong miền xác định $g(x)=x\sqrt{x}+\sqrt{x+12}$ là hàm số đồng biến và nhận giá trị dương

Hàm số $h(x)=\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}$ có đạo hàm $h'(x)=\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{4-x}}{2\sqrt{5-x}.\sqrt{4-x}}>0$

$\Rightarrow h(x)$ đồng biến và nhận giá trị dương

Do đó: $f(x)=g(x).h(x)$ là hàm số đồng biến và có tập giá trị là:

$$f(0)\leq f(x)\leq f(4)$$

Phương trình $f(x)=m$ có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{12}(\sqrt{5}-\sqrt{4})\leq m\leq 12$

2.2.1.4. Phương pháp đưa về phương trình tích

VD 23: Giải PT: $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-2}=x+3$

Giải:

Điều kiện: $x\geq 2$.

Để ý thấy: $(2x+1)-(x-2)=x+3$. Do đó, nhân lượng liên hợp vào hai vế của PT ta được:

$$(x+3)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3=0 \\ \sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2}=1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ PT vô nghiệm

VD 24: Giải PT: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$ (1)

Giải:

Điều kiện:

$$\left\{\begin{array}{c} x-1 \geq 0 \\ x^3+x^2+x+1 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \geq 1 \\ (x+1)(x^2+1) \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 1$$

Chú ý: $x^4-1 = (x-1)(x^3+x^2+x+1)$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(1-\sqrt{x^3+x^2+x+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sqrt{x-1}-1=0 \\ 1-\sqrt{x^3+x^2+x+1}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \sqrt{x-1}=1 \\ \sqrt{x^3+x^2+x+1}=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x-1=1 \\ x^3+x^2+x+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=2 \\ x(x^2+x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 1$ ta có nghiệm của PT là: $x=2$.

2.2.1.5. Phương pháp đặt ẩn phụ

Đối với các bài toán giải PT chứa căn thức mà biểu thức của nó có thể phân thành các nhóm số hạng và giữa chúng có một mối liên hệ cho bởi các hệ thức toán học cho phép chúng biểu diễn qua nhau thì có thể giải được bằng cách đặt ẩn phụ. Tuy vậy cũng cần lưu ý rằng, có những bài toán khi đã sử dụng ẩn phụ, các biểu thức còn lại trong bài toán đó vẫn còn chứa ẩn ban đầu.

1) Sử dụng một ẩn phụ

Để khử căn thức, người ta có thể đưa thêm một hoặc nhiều ẩn phụ, tùy theo dạng của PT mà lựa chọn phép đặt ẩn phụ thích hợp.

VD 25: Giải PT: $x^2 + \sqrt{x+1} = 1$ (1)

Giải:

Điều kiện: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Đặt $\sqrt{x+1} = y$ $(y \geq 0)$

$$\Rightarrow y^2 = x + 1 \Leftrightarrow x = y^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 = (y^2-1)^2$$

PT (1) trở thành:

$(y^2-1)^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y(y-1)(y^2+y-1) = 0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \\ y^2 + y - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Thay trở lại cách đặt ta có tập nghiệm của PT là: $\left\{0;\ -1;\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

VD 26: Giải PT $\left(\sqrt{x-1}+1\right)^3 + 2\sqrt{x-1} = 2 - x$ (1)

Giải:

Điều kiện $x \geq 1$. Đặt $\sqrt{x-1} + 1 = y$

(1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+1\right)^3 + \left(\sqrt{x-1}+1\right)^2 - 2 = 0$

Khi đó PT trở thành :

$$y^3 + y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^2+2y+2) = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Thay trở lại ta được $x = 1$

VD 27: Giải PT

$$2(x^2-2x)+\sqrt{x^2-2x-3}-9=0$$

Giải:

Điều kiện: $x^2-2x-3\geq\ 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 3\\ x\leq -1\end{array}\right.$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x-3},\ t\geq 0$

PT $\Leftrightarrow 2(x^2-2x-3)+\sqrt{x^2-2x-3}-3=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x-3},\ t\geq 0$

PT trở thành:

$$2t^2+t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

Với $t=1$: $\sqrt{x^2-2x-3}=1\Leftrightarrow x^2-2x-4=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{5}$

Vậy PT có nghiệm là $x=1\pm\sqrt{5}$

VD 28: Giải PT

$$(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$$

Giải:

Để khử dạng vô tỉ, ta chọn $u=\sqrt{x^2+1}\geq 1$ PT đã cho biến đổi về dạng

$(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2(x^2+1)+2x-1$

$\Leftrightarrow (4x-1)u=2u^2+2x-1\Leftrightarrow 2u^2-(4x-1)u+2x-1=0$

Là PT đối với u mà hệ số vẫn còn chứa x

$$\Delta=(4x-1)^2-8\big(2x-1\big)=(4x-3)^2$$

PT đối với u có các nghiệm là: $\left[\begin{array}{l}u=\dfrac{4x-1+(4x-3)}{4}=2x-1\\ u=\dfrac{4x-1-(4x-3)}{4}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Ta giải PT: $\sqrt{x^2+1}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ x^2+1=(2x-1)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{1}{2} \\ 3x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}$

Vậy PT có nghiệm là $x=\dfrac{4}{3}$

Lưu ý: Khi đặt ẩn phụ cần chú ý các điều kiện của ẩn nhằm tránh mất nghiệm hoặc xuất hiện thêm nghiệm ngoại lai.

Việc giải PT chứa căn thức thường gây nhiều khó khăn. Nếu nâng lên luỹ thừa để làm mất dấu căn thì dẫn đến PT bậc cao có thể khó giải. Vì vậy nếu biết cách đặt ẩn phụ thích hợp để chuyển về dạng PT chứa ẩn mới thì có thể dễ dàng giải được. Tuy nhiên có những PT khi đã sử dụng ẩn phụ mà PT vẫn còn ẩn ban đầu thì thường dẫn đến một PT bậc hai theo ẩn phụ có biệt số Δ là một số chính phương.

2) Sử dụng hai ẩn phụ

VD 29: Giải PT

$$2\left(x^2+2\right)=5\sqrt{x^3+1} \quad (1)$$

Giải:

Đặt $u=\sqrt{x+1}$, $v=\sqrt{x^2-x+1}$ Điều kiện: $x\ge -1,\ u\ge 0,\ v\ge 0$.

Khi đó: $u^2=x+1, v^2=x^2-x+1,\ u^2v^2=x^3+1$

(1) $\Leftrightarrow 2\left(u^2+v^2\right)=5uv$

$\Leftrightarrow (2u-v)(u-2v)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2v \\ v=2u \end{array}\right.$

Giải ra, xác định x. Kết quả là: x $\in \left\{\frac{5+\sqrt{37}}{2}; \frac{5-\sqrt{37}}{2}\right\}$

VD 30: Giải PT: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+7x+10}\right)=3$ (1)

Giải:

Điều kiện: $x \geq -2$

(1) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{(x+5)(x+2)}\right)=3$

Đặt: $\sqrt{x+5}=u$, $\sqrt{x+2}=v$ $(u \geq 0,\ v \geq 0) \Rightarrow u^2-v^2=3$

(1) $\Rightarrow (u-v)(1+uv)=u^2-v^2$

$\Rightarrow (u-v)(1-u+uv-v)=0$

$\Rightarrow (u-v)(1-u)(1-v)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=1 \\ v=1 \end{array}\right.$$

Giải ra ta được: $x=-1$ là nghiệm duy nhất

VD 31: Giải PT: $\sqrt{x+1}-\sqrt{3x}=2x-1$ (1)

Giải:

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x+1}=u$, $\sqrt{3x}=v$ $(u \geq 0, v \geq 0)$

(1) trở thành $u-v=v^2-u^2 \quad \Leftrightarrow (v-u)(v+u+1)=0$

Mà $v+u+1>0 \quad \Rightarrow u=v$.

Từ đó ta có: $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của PT.

VD 32: Giải PT: $\frac{4}{x}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x+\sqrt{2x-\frac{5}{x}}$ (1)

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x - \dfrac{1}{x} \geq 0 \\ 2x - \dfrac{5}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \\ \dfrac{2x^2 - 5}{x} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \neq 0 \\ x - \dfrac{1}{x} \geq 0 \\ 2x - \dfrac{5}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x < 0 \\ x \geq \dfrac{5}{2} \end{array} \right.$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x - \dfrac{1}{x}} - \left[\left(2x - \dfrac{5}{x} \right) - \left(x - \dfrac{1}{x} \right) \right] - \sqrt{2x - \dfrac{5}{x}} = 0$

Đặt $\sqrt{x - \dfrac{1}{x}}$ = u, $\sqrt{2x - \dfrac{5}{x}}$ = v (u, v $\geq$ 0)

Khi đó ta có: $u - (v^2 - u^2) - v = 0 \;\Leftrightarrow (u - v)(1 + u + v) = 0$

Vì $1 + u + v > 0$ nên: $u = v$. Thay trở lại ta được: $x = 2$ là nghiệm của PT (1)

3) Sử dụng ba ẩn phụ

VD 33: Giải PT

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \;(1)$$

Giải:

Điều kiện: $x \geq 2$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)(x - 2)} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{(x - 1)(x + 3)}$

Đặt: $\sqrt{x - 1} = a$, $\sqrt{x - 2} = b$, $\sqrt{x + 3} = c$ $\left(a, b, c \geq 0\right)$:

Từ (1) ta có: $ab + c = b + ac \quad \Leftrightarrow (a - 1)(b - c) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ b = c \end{array} \right.$. Thay trở lại ta được $x = 2$ là nghiệm duy nhất của PT

VD 34: Giải PT

$$x = \sqrt{2 - x}.\sqrt{3 - x} + \sqrt{3 - x}.\sqrt{5 - x} + \sqrt{2 - x}.\sqrt{5 - x}$$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 3-x\ge 0 \\ 5-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ x\le 3 \\ x\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow x\le 2$

Đặt : $u=\sqrt{2-x}$; $v=\sqrt{3-x}$; $t=\sqrt{5-x}$ $\left(u,\ v,\ t\ge 0\right)$

$\Rightarrow x=2-u^2=3-v^2=5-t^2=\ uv\ +\ vt\ +\ tu$

Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} (u+v)(u+t)=2 & (1) \\ (v+u)(v+t)=3 & (2) \\ (t+u)(t+v)=5 & (3) \end{cases}$

Nhân từng vế của (1), (2), (3) ta có : $[(u+v)(v+t)(t+u)]^2=30$

Vì $\left(u,\ v,\ t\ge 0\right)$nên: $(u+v)(v+t)(t+u)=\sqrt{30}$ (4)

Kết hợp (4) với lần lượt (1) ; (2) ; (3) dẫn đến:

$$\begin{cases} v+t=\dfrac{\sqrt{30}}{2} & (5) \\ u+t=\dfrac{\sqrt{30}}{3} & (6) \\ u+v=\dfrac{\sqrt{30}}{5} & (7) \end{cases}$$

Cộng từng vế của (5) ; (6) ; (7) ta có:

$$2(u+v+t)=\frac{31\sqrt{30}}{30}\Rightarrow u+v+t=\frac{31\sqrt{30}}{60}\ (8)$$

Kết hợp (8) với lần lượt (5) ; (6) ; (7) ta có:

$$\begin{cases} u=\dfrac{\sqrt{30}}{60} \\ v=\dfrac{11\sqrt{30}}{60} \\ t=\dfrac{19\sqrt{30}}{60} \end{cases} \Rightarrow x=2-\left(\frac{\sqrt{30}}{60}\right)^2=\frac{239}{120}$$

4) Sử dụng ẩn phụ đưa về hệ PT

Bên cạnh phương pháp đặt ẩn phụ, có rất nhiều bài toán cần dùng nhiều ẩn số phụ và tùy theo đặc thù của bài toán đã cho, ta thu được các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng, chẳng hạn đối với PT:

$$\sqrt{a-f(x)}+\sqrt{b-f(x)}=c$$

Ta có thể đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{a-f(x)} \\ v=\sqrt{b-f(x)} \end{cases}$, suy ra $u^2-v^2=a-b$

Khi đó ta thu được hệ PT: $\begin{cases} u^2-v^2=a-b \\ u+v=c \end{cases}$

VD 35: Giải PT $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=5$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x\geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$

Đặt $\sqrt{x-1}=u$ và $\sqrt{2x-1}=v$ $(u,\ v\geq 0)$

Ta có hệ: $\begin{cases} u+v=5 \\ v^2-2u^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=2 \\ u=-12 \end{array}\right. \Rightarrow x=5$.

VD 36: Giải PT: $\sqrt{8+\sqrt{x}}+\sqrt{5-\sqrt{x}}=5$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} x\geq 0 \\ 8+\sqrt{x}\geq 0 \\ 5-\sqrt{x}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x\leq 25$

Đặt $\sqrt{8+\sqrt{x}}=u$, $\sqrt{5-\sqrt{x}}=v$ $(u,\ v\geq 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u^2+v^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Từ đó ta có $x=1$ là nghiệm duy nhất.

VD 37: Giải PT: $\sqrt{25-x^2}-\sqrt{9-x^2}=2$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ 9-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

Đặt $\sqrt{25-x^2}=u$, $\sqrt{9-x^2}=v\ (u,\ v \geq 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u-v=2 \\ u^2-v^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=2 \\ u+v=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ v=3 \end{cases}$$

Thế trở lại: $x=0$ là nghiệm duy nhất.

VD 38: Giải PT: $\sqrt{1-x}+\sqrt{4+x}=3$

Giải:

Điều kiện: $-4 \leq x \leq 1$

Đặt $\sqrt{1-x}=u$; $\sqrt{4+x}=v\ (u,\ v \geq 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \end{array} \right.$$

VD 39: Giải PT $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x^2}=2$

Giải:

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 2$

Đặt $\sqrt{2-x}=u$, $\sqrt{2+x}=v\ (u,\ v \geq 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (u+v)^2-2uv=4 \\ (u+v)+uv=2 \end{cases}$$

Giải ra ta được: $\begin{cases} u=2 \\ v=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=0 \\ v=2 \end{cases}$ Thay trở lại ta được: $x=\pm 2$

VD 40: Giải PT: $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} 97-x\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 97 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0\leq x\leq 97$

Đặt $\sqrt[4]{97-x}=u$, $\sqrt[4]{x}=v$ $(u,\ v\geq 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=97 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases} \end{array}\right. \text{ Thay trở lại ta được: } \left[\begin{array}{l} x=81 \\ x=16 \end{array}\right.$$

VD 41: Giải PT $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$

Giải:

Đặt $\sqrt[3]{x}=u,\ \sqrt[3]{2x-3}=v$

Khi đó:

$$u+v=\sqrt[3]{4(u^3+v^3)}$$

$$\Leftrightarrow u^3+v^3+3uv(u+v)=4(u^3+v^3)$$

$$\Leftrightarrow 3(u+v)(u^2-2uv+v^2)=0$$

$$\Leftrightarrow 3(u+v)(u-v)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=-v \\ u=v \end{array}\right.$$

Với $u=v$ ta có: $\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{2x-3} \Leftrightarrow x=2x-3 \Leftrightarrow x=3$

Với $u=-v$ ta có: $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{2x-3} \Leftrightarrow x=-2x+3 \Leftrightarrow x=1$

Kết luận: PT có hai nghiệm $x=1,\ x=3$

2.2.1.6. Phương pháp dùng biểu thức liên hợp

Giả sử ta cần giải phương trình $f(x)=0$ và đã biết trước một nghiệm $x=x_0$ của phương trình. Khi đó ta sẽ tìm cách phân tích đưa về phương trình dạng: $(x-x_0).g(x)=0$.

Để phân tích được về thừa số $x-x_0$ ta chuyển các biểu thức chứa căn về các đa thức bằng cách nhân liên hợp:

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}\left(f(x)\neq g(x)\right)$$

$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}}$$

$$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt[3]{f^2(x)}-\sqrt[3]{f(x)}.\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}}$$

$$\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{g(x)}=\frac{f(x)-g(x)}{\sqrt[3]{f^2(x)}+\sqrt[3]{f(x)}.\sqrt[3]{g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}}$$

Ngoài ra để thuận lợi trong việc phân tích cần nắm vững các hằng đẳng thức sau:

$$\left(A+B\right)^2=A^2+2AB+B^2$$

$$\left(A-B\right)^2=A^2-2AB+B^2$$

$$A^2-B^2=\left(A-B\right)\left(A+B\right)$$

$$\left(A+B\right)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=A^3+B^3+3AB\left(A+B\right)$$

$$\left(A-B\right)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=A^3-B^3-3AB\left(A-B\right)$$

VD 42: Giải PT

$$\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=\frac{x+3}{3}\ (1)$$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 4x+1 \ge 0 \\ 3x-2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{2}{3}$. Từ đó $x+3>0$. Nhận xét thấy

$x+3>0$ $(4x-1)-(3x-2)=x+3$ nên nếu nhân cả hai vế của PT (1) với biểu thức liên hợp với vế trái (biểu thức này luôn dương) thì xuất hiện nhân tử chung là $x+3$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(4x-1)-(3x-2)}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{3x-2}} = \frac{x+3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{4x-1}+\sqrt{3x-2}} = \frac{x+3}{5}$$

$$\Leftrightarrow x+3 = \frac{x+3}{5}(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2})$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}-5)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=5 \text{ (*) (do } x+3>0\text{)}$$

Đến đây ta thấy PT (*) là phương trình dạng $\sqrt{\mathrm{f(x)}}+\sqrt{g(x)}=m$, giải bằng phương pháp nâng lên lũy thừa.

PT (*) $\Leftrightarrow 4x+1+2\sqrt{(4x+1)(3x-2)}+3x-2=25$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{12x^2-5x-2}=26-7x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 26-7x \ge 0 \\ 4(12x^2-5x-2)=(26-7x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{26}{7} \\ x^2-344x+684=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{26}{7} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=342 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Cách tiếp cận khác:

Ta dễ thấy PT (*) có nghiệm $x=2$, hàm số $y=\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}$ đồng biến, do vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất.

VD 43: Giải PT

$$\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$$

Nhận xét:

Phương trình đã cho có 4 căn thức, với phương trình dạng này hoàn toàn ta có thể giải bằng cách chuyển vế rồi bình phương hai lần để đưa về phương trình có bản. Ở đây ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp.

Ta tìm được một nghiệm của PT là $x=3$, khi đó $\sqrt{10x+1}=\sqrt{31}$, $\sqrt{3x-5}=2$, $\sqrt{9x+4}=\sqrt{31}$, $\sqrt{2x-2}=2$ nên ta sẽ nhóm:

$\left(\sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}\right)$ và $\left(\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2}\right)$

Giải:

Điều kiện: $x\ge\frac{5}{3}$

PT ban đầu $\Leftrightarrow\sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}=\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2}$

$$\Leftrightarrow\frac{x-3}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}=\frac{x-3}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}$$

$$\Leftrightarrow(x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=3\\ \frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0(*)\end{array}\right.$$

Do $x\ge\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}>0$ nên PT (*) vô nghiệm.

Vậy PT đã cho có 1 nghiệm $x = 3$.

2.2.1.7. Phương pháp sử dụng đạo hàm

Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải PT, hệ PT, BPT, chúng ta thường sử dụng các kết quả sau:

Định lí 1: Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên D thì số nghiệm của PT $f(x) = k$ trên D không nhiều hơn một và $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ với mọi $x, y \in D$.

Chứng minh.

a) Giả sử PT $f(x) = k$ có nghiệm $x = a$ tức là $f(a) = k$.

Nếu $x > a$ thì $f(x) > f(a) = k$ suy ra PT vô nghiệm.

Nếu $x < a$ thì $f(x) < f(a) = k$ suy ra PT vô nghiệm.

Vậy PT $f(x) = k$ có nghiệm duy nhất $x = a$.

b) Nếu $x > y$ thì $f(x) > f(y)$ suy ra PT $f(x) = f(y)$ vô nghiệm.

Nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ suy ra PT $f(x) = f(y)$ vô nghiệm.

Định lí 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và hàm số $y = g(x)$ luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) và liên tục trên D thì số nghiệm của PT $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

Chứng minh. Giả sử PT $f(x) = g(x)$ có nghiệm $x = a$ tức là $f(a) = g(a)$.

Nếu $x > a$ thì $f(x) > f(a) = g(a) > g(x)$ suy ra PT vô nghiệm.

Nếu $x < a$ thì $f(x) < f(a) = g(a) < g(x)$ suy ra PT vô nghiệm.

Vậy PT $f(x) = g(x)$ có nghiệm duy nhất $x = a$.

Định lí 3: Nếu đồ thị hàm *số* $y = f(x)$ lồi (lõm) trên khoảng $(a;b)$ thì PT $f(x) = 0$ nếu có nghiệm thì có tối đa 2 nghiệm.

** Khi sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải PT chúng ta thường thực hiện như sau:*

- Tìm tập xác định của PT.

- Biến đổi PT (nếu cần) để đặt f(x) bằng một biểu thức nào đó.

- Tính đạo hàm f(x), rồi dựa vào tính đồng biến (nghịch biến) của hàm số để kết luận nghiệm của PT.

VD 44: Giải PT $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1$

Nhận xét: Phương trình đã cho có hai căn thức, ta hoàn toàn có thể giải phương trình này bằng phương pháp nâng lên lũy thừa. Mặt khác ta thấy vế trái của PT luôn đồng biến, do đó ta giải PT bằng phương pháp hàm số.

Giải:

Điều kiện: $-1 \le x \le 4$

Xét hàm số: $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}, x \in [-1;4]$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}>0, \forall x \in [-1;4] \Rightarrow f(x)$ đồng biến

Mà $f(3)=1 \Rightarrow x=3$ là nghiệm duy nhất.

VD 45: Giải PT $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2+7x+1}=4\sqrt{x}$

Nhận xét: PT đã cho có ba căn thức, đối với PT có chứa ba căn thức ta sẽ tìm cách chia hai vế của phương trình cho biểu thức căn đơn giản nhất để đưa bài toán về PT chỉ có hai căn thức.

Giải:

Điều kiện: $x \ge 0$

Với $x=0$, không thỏa mãn PT

Với $x \ne 0$, PT đã cho trở thành

$$\sqrt{x-1+\frac{1}{x}}+\sqrt{x+7+\frac{1}{x}}=4 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)-1}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)+7}=4$$

Sau khi chia hai vế cho $\sqrt{x}$ ta thấy PT đã cho chỉ còn lại hai căn thức. Đến đây, để đơn giản ta đặt ẩn phụ $t=x+\dfrac{1}{x}$, ta được PT: $\sqrt{t-1}+\sqrt{t+7}=4$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t-1}+\sqrt{t+7}, t\in[1;+\infty)$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{t+7}}>0, \forall t\in[1;+\infty)\Rightarrow f(t)$ đồng biến

Do $f(2)=4\Rightarrow t=2$ là nghiệm duy nhất của PT: $\sqrt{t-1}+\sqrt{t+7}=4$

Với $t=2$, thay trở lại cách đặt ta được:

$$x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$$

Vậy PT đã cho có nghiệm $x=1$.

VD 46: Giải PT: $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x=4$ (1)

Nhận xét: Quan sát vế trái của PT (2), ta thấy khi *x* tăng thì giá trị của biểu thức trong căn bậc hai cũng tăng. Từ đó, ta thấy vế trái là hàm đồng biến và vế phải bằng 4 là hàm hằng. Đây là điều kiện thích hợp để sử dụng tính đơn điệu.

Giải:

TXĐ: D = $[\frac{1}{\sqrt[3]{5}},+\infty)$.

Xét hàm số f(x) = $\sqrt{5x^3-1}+\sqrt[3]{2x-1}+x$ trên D.

Ta có $f'(x)=\dfrac{15x^2}{2\sqrt{5x^3-1}}+\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}+1>0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$.

Suy ra, hàm số f(x) đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}};+\infty\right)$.

Mặt khác, ta có $f(1)=4$.

Do đó, $x=1$ là nghiệm duy nhất của PT (1).

VD 47: Giải PT $x^5+x^3-\sqrt{1-3x}+4=0$

Giải:

TXĐ: D = $(-\infty; \frac{1}{3}]$.

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$ trên tập D.

Ta có $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \frac{3}{2\sqrt{1-3x}} > 0;\ \forall x < \frac{1}{3}$.

Suy ra, hàm số *f(x)* đồng biến trên D.

Mặt khác, ta có $f\left(-1\right) = 0$.

Do đó, $x = -1$ là nghiệm duy nhất của PT

2.2.2. Biện pháp 2: Luyện tập cho HS vận dụng quy trình giải toán theo 4 bước của Polya vào giải PT chứa căn thức

***) Cơ sở của biện pháp:**

Người có năng lực là người biết cách tiến hành hoạt động một cách hiệu quả và đạt kết quả phù hợp với mục đích (bao gồm xác định mục tiêu, cách thức/phương pháp thực hiện hành động/lựa chọn được các giải pháp phù hợp… và cả các điều kiện để đạt được mục đích). Tập luyện cho HS vận dụng quy trình thuật giải của Polya vào giải PT chứa căn thức phần nào đáp ứng được những yêu cầu trên, góp phần hình thành năng lực cho HS.

***) Cách thức thực hiện biện pháp:**

Muốn HS có thể vận dụng quy trình thuật giải của Polya vào giải một bài toán trước hết cần phải làm cho HS hiểu được và vận dụng được phương pháp chung để giải toán vào việc giải một bài toán cụ thể. GV chọn các bài toán PT chứa đựng nhiều cơ hội để HS vận dụng được quy trình của Polya. Sau đó HS nhắc lại các bước của quy trình. GV cho HS thực hiện từng bước theo quy trình thông qua các câu hỏi gợi mở đúng thời điểm, đúng chỗ để HS có thể dần biết tự sử dụng chúng như một phương tiện để kích thích suy nghĩ, dự đoán, tìm tòi… tìm ra hướng đi trong quá trình giải toán. Từ đó, làm cho

HS thấy cần thiết và có ý thức vận dụng vào giải mỗi bài toán. (dạy học đàm thoại phát hiện và giải quyết vấn đề)

VD 48: Luyện tập phương pháp giải PT chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

Giải PT $\sqrt{5x+6} = x-6$

Bước 1: Tìm hiểu PT

(?) PT có mấy dấu căn bậc hai?

(!) PT có một dấu căn bậc hai.

(?) PT có mấy ẩn số?

(!) PT có 1 ẩn số là x.

(?) Có cần điều kiện cho PT không, Điều kiện là gì?

(!) Vì dưới dấu căn bậc hai có chứa ẩn nên cần phải lấy điều kiện để biểu thức dưới dấu căn bậc hai không âm.

(?) Các biểu thức có mặt trong PT có quan hệ gì?

(!) Biểu thức trong và ngoài căn đều là bậc nhất.

Bước 2: Tìm cách giải

(?) PT này đã gặp chưa?

(!) Ta đã gặp PT này có dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

(?) Phương pháp giải PT đó như thế nào?

(!) Bình phương hai vế của PT.

(?) Một PT phải thỏa mãn điều kiện nào thì mới được bình phương hai vế của PT?

(!) Hai vế phải không âm.

(?) Ngoài cách giải trên còn cách nào khác?

(!) Dễ dàng nhận thấy có thể đặt một ẩn phụ để đưa PT vô tỷ về dạng nguyên.

Bước 3. Trình bày lời giải

Cách 1: Điều kiện: $5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{6}{5}$

$$\sqrt{5x+6}=x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6\geq 0 \\ (\sqrt{5x+6})^2=(x-6)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 6 \\ x^2-17x+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 6 \\ x=15 \vee x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=15$$

Cách 2: Điều kiện: $5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{6}{5}$

Đặt $t=\sqrt{5x+6}(t\geq 0) \Rightarrow t^2=5x+6 \Rightarrow x=\dfrac{t^2-6}{5}$

Thay $x=\dfrac{t^2-6}{5}$ vào PT ta được:

$$t=\frac{t^2-6}{5}-6 \Leftrightarrow t^2-5t-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=9 \\ t=-4 \end{array}\right.$$

Với $t=9$: $\sqrt{5x+6}=9 \Leftrightarrow 5x+6=81 \Leftrightarrow x=15$

Vậy PT đã cho có một nghiệm $x=15$.

Bước 4. Nghiên cứu sâu lời giải

(?) Phương pháp nâng lên luỹ thừa và đặt ẩn phụ được sử dụng để giải dạng PT nào?

(!) Còn tùy thuộc vào dạng PT và biểu thức trong và ngoài căn bậc hai để lựa chọn cách giải thích hợp.

Lời bình: Cả hai cách trên đều đơn giản, dễ hiểu. Việc lựa chọn cách nào phụ thuộc vào kiến thức, sở thích của học sinh. Như vậy một bài toán có thể có nhiều hơn một cách giải, điều đó tùy thuộc vào mối liên hệ giữa các số hạng, giữa các nhóm số hạng có mặt trong bài toán, ... Qua tình huống rèn cho học sinh khả năng tìm lời giải khác, trang bị cho học sinh phương pháp giải toán PT dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

VD 49: Luyện tập phương pháp giải PT chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai dạng $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$

Giải PT $\sqrt{x-2} = \sqrt{x^2 - 8x - 2} - \sqrt{x-8}$

Bước 1: Tìm hiểu PT

(?) PT có mấy dấu căn bậc hai?

(!) PT có ba dấu căn bậc hai.

(?) PT có mấy ẩn số?

(!) PT có 1 ẩn số là x.

(?) Có cần điều kiện cho PT không, Điều kiện là gì?

(!) Vì dưới dấu căn bậc hai có chứa ẩn nên cần phải lấy điều kiện để biểu thức dưới dấu căn bậc hai không âm.

(?) Các biểu thức có mặt trong PT có quan hệ gì?

(!) Có hai biểu thức đều là bậc nhất, một biểu thức bậc hai.

Bước 2: Tìm cách giải

(?) PT này đã gặp chưa?

(!) Ta đã gặp PT này có dạng $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$.

(?) Biểu thức $x^2 - 8x - 2$ này có phân tích được thành tích của $(x-2)(x-8)$ không? Nếu không thì biến đổi PT như thế nào để có thể áp dụng cách giải của PT đã gặp?

(!) Không, biến đổi PT về dạng $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ sao cho các biểu thức $f(x), g(x)$ dưới dấu căn bậc hai cùng bậc.

(?) Cách giải PT dạng $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$?

(!) Bình phương hai vế của PT.

(?) Một PT phải thỏa mãn điều kiện nào thì mới được bình phương hai vế của PT?

(!) Hai vế phải không âm.

Bước 3. Trình bày lời giải

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 8 \\ x^2 - 8x - 2 \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{x-2} = \sqrt{x^2 - 8x - 2} - \sqrt{x-8}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{x-8} = \sqrt{x^2 - 8x - 2}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2} + \sqrt{x-8})^2 = (\sqrt{x^2 - 8x - 2})^2$

$\Leftrightarrow x - 2 + x - 8 + 2\sqrt{x-2}.\sqrt{x-8} = x^2 - 8x - 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 2\sqrt{x^2 - 10x + 16} + 8 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 10x + 16}$, (Điều kiện : t $\geq$ 0) $\Leftrightarrow t^2 = x^2 - 10x + 16$

$(2) \Rightarrow t^2 - 16 - 2t + 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -2 \end{array}\right.$ $(t = 2$ loại)

Với $t = 4$

$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 10x + 16} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 10 \end{array}\right.$

Thay $x = 10$ vào điều kiện ta thấy thỏa mãn; $x = 10$ không thỏa mãn

Kết luận : PT có một nghiệm $x = 10$.

Bước 4. Nghiên cứu sâu lời giải

(?) Có phải mọi PT có dạng $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$ đều sử dụng phương pháp lũy thừa?

(!) Không, còn tùy thuộc vào các biểu thức dưới dấu căn bậc hai.

(?) Nếu thay đổi biểu thức $x^2 - 8x - 2$ thành $x^2 - 10x + 16$ thì PT $\sqrt{x-2} = \sqrt{x^2 - 10x + 16} - \sqrt{x-8}$ có cách giải khác không?

(!) Học sinh về nhà suy nghĩ để tìm lời giải.

(?) Giải PT $\sqrt{2-x}=\sqrt{-x^2+10x-16}-\sqrt{x-8}$

(!) Học sinh về nhà suy nghĩ để tìm lời giải.

Lời bình: Qua tình huống trên đã phát triển cho học sinh năng lực sáng tạo bài toán mới, đồng thời bồi dưỡng cho học sinh phương pháp giải PT dạng $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$ bằng phương pháp lũy thừa và phương pháp đặt ẩn phụ.

2.2.3. Biện pháp 3: Khuyến khích HS giải PT chứa căn thức theo nhiều cách

***) Cơ sở của biện pháp:**

Người có năng lực là người biết hành động có kết quả, ứng phó linh hoạt được trong những điều kiện mới, không quen thuộc. Rèn luyện được tính linh hoạt cho HS góp phần hình thành một bộ phận nhỏ của cấu trúc năng lực toán học: *Tính linh hoạt* của quá trình tư duy trong hoạt động toán học và *năng lực nhanh chóng dễ dàng* sửa lại phương hướng của quá trình tư duy. Khuyến khích HS giải PT bằng nhiều cách là một mắt xích trong bước 4 của quy trình giải toán của Polya. Từ đó, HS biết được nhiều cách giải của bài toán, tìm được cách giải hợp lí nhất, biết nghiên cứu những bài toán tương tự. Rèn luyện cho HS tính linh hoạt bằng cách khuyến khích HS giải bài toán PT bằng nhiều cách góp phần hình thành năng lực cho HS.

***) Cách thức thực hiện biện pháp:**

- GV lựa chọn những bài toán tiềm năng có thể có nhiều hướng giải đề ra cho HS.

- Gọi lại các phương pháp giải PT thường áp dụng như: Bình phương hai vế, đặt ẩn phụ, phân tích ra thừa số…

- GV yêu cầu HS thử vận dụng từng phương pháp để giải PT đã nêu.

- Phân tích cho HS thấy phương pháp nào có thể áp dụng được và phương pháp nào sẽ gặp khó khăn.

VD 50: Giải PT: $x^2 + \sqrt{x+1} = 1$ (1)

Điều kiện xác định của PT: $x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1$

Cách 1: Bình phương hai vế

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \ge 0 \\ x+1 = (1-x^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x^4 - 2x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x(x^3 - 2x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x = 0 \vee x = -1 \vee x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

Cách 2: Phân tích ra thừa số

Điều kiện: $x \ge -1$

$$x^2 + \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 + \sqrt{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left[(x-1)\sqrt{x+1} + 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(x\sqrt{x+1} + 1 - \sqrt{x+1}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(x\sqrt{x+1} - \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\right) = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ \sqrt{x+1} = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x + 1 + \sqrt{x+1} = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ \sqrt{x+1} = -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Cách 3: Dùng ẩn phụ đưa PT thành một hệ PT

Đặt $y = \sqrt{x+1}$; $y \ge 0$; $x \ge -1$ ta được hệ $\begin{cases} x^2 + y = 1 & (2) \\ y^2 - x = 1 & (3) \end{cases}$

Trừ vế với của PT (2) và (3) trong hệ, ta được: $(x^2 - y^2) + (x + y) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)(x-y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -x \\ y = x + 1 \end{array}\right.$

Thế $y = -x$ vào (3) ta được:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Do $y \ge 0$ nên $y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Suy ra $\sqrt{x+1} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của PT

Thế $y = x + 1$ vào (3) ta được: $(x+1)^2 = x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Cách 4: Dùng ẩn phụ đưa PT thành một PT với một ẩn phụ

Đặt $y=\sqrt{x+1};\ y\ge 0;\ x\ge -1 \Rightarrow y^2=x+1 \Rightarrow x=y^2-1$ thế vào PT (1) ta được :

$$(y^2-1)^2+y=1 \Leftrightarrow y^4-2y^2+y=0$$

$$\Leftrightarrow y(y^3-2y+1)=0 \Leftrightarrow y(y-1)(y^2+y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1}=0 \\ \sqrt{x+1}=1 \\ \sqrt{x+1}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Nhận xét: Trong VD trên, ta thấy PT có hình thức ngắn gọn, rõ ràng và có lời giải tự nhiên. Tuy nhiên nếu phân tích và tìm hiểu kỹ thì PT lại có nhiều hướng giải. Trong đó giải PT theo cách bình phương hai vế và đặt ẩn phụ là ngắn gọn và tự nhiên hơn cả, còn cách phân tích ra thừa số thì đòi hỏi HS phải có kiến thức và kỹ năng tốt để phân tích $x^2-1=\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2$, đối với cách dùng ẩn phụ đưa PT thành một hệ PT thì người giải lại phải có sự khéo léo kết hợp giữa ẩn của PT với ẩn phụ để tạo thành một hệ PT. Hơn nữa việc có thể phân tích PT thành PT tích hoặc thành hệ PT không phải lúc nào cũng xẩy ra.

VD 51: Giải PT: $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$ (1)

Phân tích: Khi nhìn vào PT này, HS có thể nghĩ ngay đến PP giải thông thường là bình phương hai vế. Nhưng quan sát kỹ hai biểu thức dưới dấu căn thì ta thấy là chúng có cùng bậc, hệ số của ẩn tương ứng là bằng nhau. Điểm đặc biệt này sẽ dẫn chúng ta đến những con đường khác nhau để giải PT một cách ngắn gọn và hay hơn.

Cách 1: Bình phương hai vế

$$\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+3}=3-\sqrt{x^2-3x+6}$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+3=9-6\sqrt{x^2-3x+6}+x^2-3x+6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+6}=2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Cách 2: Dùng ẩn phụ chuyển PT chứa căn thức thành một hệ PT với 2 ẩn phụ.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2-3x+3} \\ v=\sqrt{x^2-3x+6} \end{cases};u,v>0$

Ta có hệ PT $\begin{cases} u+v=3 \\ u^2-v^2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ u-v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} \sqrt{x^2-3x+3}=1 \\ \sqrt{x^2-3x+6}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Cách 3: Dùng ẩn phụ chuyển PT chứa căn thức thành một PT với một ẩn phụ.

Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+3};\ (t>0) \Rightarrow \sqrt{x^2-3x+6}=\sqrt{t^2+3}$

Khi đó PT trở thành:

$$t+\sqrt{t^2+3}=3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+3}=3-t \Leftrightarrow t^2+3=9-6t+t^2 \Leftrightarrow t=1$$

Thay trở lại cách đặt ta được:

$$\sqrt{x^2-3x+3}=1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Sau khi đặt một ẩn ta may mắn được một PT bậc “đẹp”.

Cách 4: Đưa về hệ PT một ẩn

Nhân liên hợp, ta được PT: $\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-3x+6}=-1$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta được hệ PT:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3 \\ \sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-3x+6}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-3x+3}=1 \\ \sqrt{x^2-3x+6}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Trong bốn cách trên thì cách 4 có phần ít tự nhiên hơn, nhưng lại cho ta lời giải ngắn gọn hơn. Cách giải này đòi hỏi HS phải có tư duy nhạy bén, kiến thức vững vàng, biết kết hợp giữa cái đã cho và cái tìm được. Do sự đặc biệt của biểu thức dưới dấu căn nên ta có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ để giải các lớp PT dạng này.

Một bài toán thường có nhiều cách giải, HS thường có những suy nghĩ nhiều khi độc đáo và sáng tạo trước một bài toán. Vì vậy, GV cần lưu ý để phát huy tính sáng tạo của HS trong việc tìm lời giải gọn, hay của một bài toán. Khuyến khích HS sáng tạo ra nhiều cách khi tham gia học tập trên lớp và tại nhà. Lưu ý HS lựa chọn PP phù hợp với năng lực của mình nhất khi đi thi để tiết kiệm thời gian.

Có hàng lớp các bài toán mà việc giải chúng có nhiều cách khác nhau, thậm chí có những bài toán có dạng tổng quát và có sẵn phương pháp giải. Nhưng học toán và làm toán không phải là chỉ có được kết quả của nó mà ta cần rèn luyện khả năng tư duy, sáng tạo. Vì thế nếu xem xét kĩ lưỡng mối quan hệ giữa các yếu tố của bài toán ta có thể tìm ra được nhiều cách giải cho một bài toán.

Cùng đi tới đích có nhiều con đường khác nhau. Giải một bài toán bằng nhiều cách không phải là mục đích của người giải toán. Tuy nhiên việc tìm ra con đường tối ưu nhất trong nhiều con đường sẽ rèn luyện cho HS không chỉ có năng lực toán học mà còn có năng lực tham gia hiệu quả nhiều loại hoạt động trong đời sống xã hội và cho học suốt đời (ví dụ: năng lực nhận thức, năng lực giải quyết vấn đề, năng lực hợp tác, năng lực tự học v.v…). Đó cũng là phẩm chất tốt đẹp có được từ việc làm toán.

2.2.4. Biện pháp 4: Phát hiện và sửa chữa sai lầm trong quá trình giải phương trình chứa căn thức.

***) Cơ sở của biện pháp:**

Vấn đề nghiên cứu một số sai lầm phổ biến và sai lầm của HS khi giải PT là rất cần thiết, bởi lẽ, thực tiễn sư phạm cho thấy HS còn mắc rất nhiều kiểu sai lầm. Từ những sai lầm về tính toán đến những sai lầm về suy luận và thậm chí là những kiểu sai lầm rất tinh vi. Một nguyên nhân không nhỏ là vẫn còn GV chưa chú trọng một cách đúng mức việc phát hiện, uốn nắn và sửa chữa các sai lầm cho HS ngay trong các giờ học Toán. Vì điều này nên ở HS nhiều khi gặp phải tình trạng *sai lầm nối tiếp sai lầm*. HS trung phổ thông còn mắc nhiều sai lầm trong giải toán PT do các nguyên nhân: HS chưa có hệ thống hóa kiến thức cơ bản để giải PT: Không nắm vững khái niệm, không nắm vững định lý, không hiểu thuật ngữ toán học, chưa thành thục kĩ năng. Việc tìm ra những nguyên nhân của sai lầm đó là để có những biện pháp hạn chế, sửa chửa chúng, giúp cho HS nhận thức được những sai lầm và khắc phục những sai lầm này, nhằm rèn luyện năng lực giải toán cho HS.

***) Cách thức thực hiện biện pháp:**

- GV lựa chọn một số sai lầm HS thường mắc phải.

- Gọi lại các phương pháp giải PT chứa căn thức thường áp dụng như: Bình phương hai vế, đặt ẩn phụ, phân tích ra thừa số…

- GV đưa ra lời giải sai yêu cầu HS phát hiện các sai lầm, từ đó đua ra lời giải đúng để giải PT.

- Phân tích cho HS thấy các sai lầm có thể gặp phải trong từng bước của quá trình suy nghĩ, trình bày lời giải.

2.2.4.1. Sai lầm liên quan đến điều kiện xác định của PT:

VD 52: Giải PT: $2x+\sqrt{x-3}=4+\sqrt{x-3}$

Có HS giải như sau:

$2x+\sqrt{x-3}=4+\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$

Kết luận PT có nghiệm $x=2$

Nhận xét: HS giải bỏ bước đặt điều kiện: $x \geq 3$ nên $x=2$ không thỏa mãn điều kiện, PT đã cho vô nghiệm. Từ đó để có lời giải đúng ta cần bổ sung điều kiện $x \geq 3$.

Giải:

Điều kiện: $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

Với điều kiện đã cho PT tương đương với:

$2x+\sqrt{x-3}=4+\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$ (Không thỏa mãn điều kiện)

Kết luận PT đã cho vô nghiệm.

VD 53: Giải PT: $(x^2-4x+3)\sqrt{x-2}=0$

Ta xét lời giải sau:

$$(x^2-4x+3)\sqrt{x-2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ \sqrt{x-2}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Nhận xét:

Trong lời giải trên HS thiếu điều kiện nên thừa nghiệm $x=1$

Biến đổi sai $g(x)\sqrt{f(x)}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{f(x)}=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$

Trong trường hợp này để phép biến đổi tương đương thì cần thêm điều kiện $x \geq 2$.

Biến đổi đúng: $g(x)\sqrt{f(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right. \end{cases}$

Giải:

$$(x^2-4x+3)\sqrt{x-2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0 \\ x^2-4x+3=0 \\ \sqrt{x-2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Kết luận: PT đã cho có 2 nghiệm: $x=2, x=3$.

2.2.4.2. Sai lầm liên quan đến sử dụng công thức biến đổi dẫn đến sai nghiệm, thiếu trường hợp.

VD 54: Giải PT: $\sqrt{(x-2)(2x+6)}=\sqrt{(x-2)(x-5)}$

Xét lời giải sau:

Điều kiện $\begin{cases} (x-2)(2x+6)\ge 0 \\ (x-2)(x-5)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -3 \\ x\ge 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\le 2 \\ x\ge 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x\ge 5 \\ x\le -3 \end{array}\right.$

Với điều kiện trên ta có:

$\sqrt{(x-2)(2x+6)}=\sqrt{(x-2)(x-5)}$ (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\sqrt{2x+6}=\sqrt{x-2}\sqrt{x-5}$ (**)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-2}\sqrt{x-5}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\left(\sqrt{2x+6}-\sqrt{x-5}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}=0 \\ \sqrt{2x+6}-\sqrt{x-5}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x\ge 5 \\ x=-11 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$

Nhận xét: Nguyên nhân HS hiểu sai khi ta thực hiện phép biến đổi

$\sqrt{(x-2)(2x+6)}=\sqrt{(x-2)(x-5)}$ (*)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\sqrt{2x+6}=\sqrt{x-2}\sqrt{x-5}$ (**)

Thì điều kiện cần đặt ra là: $\begin{cases} x-2\ge 0 \\ 2x+6\ge 0 \\ x-5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\ge -3 \\ x\ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 5$

Khi đó phép biến đổi đã thu hẹp miền xác định nên PT (*) là hệ quả của (**)

Giải:

Điều kiện $\begin{cases} (x-2)(2x+6)\ge 0 \\ (x-2)(x-5)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -3 \\ x\ge 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\le 2 \\ x\ge 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x\ge 5 \\ x\le -3 \end{array}\right.$

Với điều kiện trên ta có:

$\sqrt{(x-2)(2x+6)}=\sqrt{(x-2)(x-5)}$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x+6)=(x-2)(x-5)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2x+6-(x-5)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-11 \end{array}\right.$

Cả hai giá trị đều thỏa mãn điều kiện. Kết luận: PT đã cho có 2 nghiệm $x=2, x=-11$.

VD 55: Giải PT: $\sqrt{(x+1)(x^2-x-2)}=x+1$ (1)

Có HS giải như sau:

PT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)[(x+1)(x-2)]}=x+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2.(x-2)}=x+1$ (2)

$\Leftrightarrow |x+1|\sqrt{x-2}=x+1$ (3)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{x-2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x-2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=-1, x=3$.

Nhận xét: Ở lời giải trên HS chưa tìm miền xác định của PT, thực hiện phép biến đổi $(2) \Leftrightarrow (3)$ là sai vì tại $x=-1$ thì biểu thức $\sqrt{(x+1)^2.(x-2)}$ xác định nhưng $|x+1|\sqrt{x-2}$ không xác định.

Giải:

Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x-2\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x\geq 2 \end{array}\right.$

Với $x=-1$: thay vào PT ta thấy thỏa mãn

Với $x\geq 2$:

PT (*) $\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)[(x+1)(x-2)]}=x+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2.(x-2)}=x+1$

$\Leftrightarrow |x+1|\sqrt{(x-2)}=x+1$

$\Leftrightarrow x+1\sqrt{(x-2)}=x+1$ (do $x+1>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)}=1$

$\Leftrightarrow x=3$ *(thỏa mãn điều kiện $x\geq 2$)*

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm $x=-1,\ x=3$

Cần lưu ý: $\sqrt{f(x)g(x)}=\begin{cases} \sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} & khi\ f(x)\geq 0 \wedge g(x)\geq 0 \\ \sqrt{-f(x)}\sqrt{-g(x)} & khi\ f(x)<0 \wedge g(x)<0 \end{cases}$

VD 56: Giải PT: $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=5$

Có HS trình bày lời giải như sau:

$$\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=5$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1+2.2\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-2.3\sqrt{x-1}+9}=5$$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+2+\sqrt{x-1}-3=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=3 \Leftrightarrow x-1=9 \Leftrightarrow x=10$

Nhận xét: Nguyên nhân sai lầm là chưa tìm điều kiện xác định của PT: $x \geq 1$, khi sử dụng phép biến đổi $\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=\sqrt{x-1}-3$ thì điều kiện cần có là: $\sqrt{x-1}-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 10$ *(đã thu hẹp miền xác định)*

Giải:

Điều kiện: $x \geq 1$

PT $\Leftrightarrow \sqrt{x-1+2.2\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{x-1-2.3\sqrt{x-1}+9}=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-3\right)^2}=5$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=5$

- Với $\sqrt{x-1}-3 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow x-1 \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 10$

PT trở thành: $\sqrt{x-1}+2+\sqrt{x-1}-3=5 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=3 \Leftrightarrow x=10$ (thỏa mãn)

- Với $1 \leq x < 10$ PT (1) có dạng $\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=5$ thỏa mãn với mọi giá trị miền xét.

Kết luận PT đã cho có tập nghiệm $T=[1;10)\cup\{10\}=[1;10]$.

VD 57: Giải PT sau: $\sqrt{4x^2-4x+1}=x+2 \qquad (1)$

Ta xét lời giải sau:

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2}=x+2 \Leftrightarrow 2x-1=x+2 \Leftrightarrow x=3$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất x = 3

Nhận xét : Nguyên nhân sai HS sử dụng khai triển $\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$ nên để đúng công thức thì $\sqrt{f^2(x)} = g(x) \Leftrightarrow |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = \pm g(x) \end{cases}$.

Giải:

Điều kiện: $4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0$ (thỏa mãn với $\forall x \in \mathbb{R}$)

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2} = x + 2$

$\Leftrightarrow |2x - 1| = x + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = x + 2 \\ 2x - 1 = -x - 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Vậy PT có 2 nghiệm là $x = 3$ và $x = \dfrac{1}{3}$

2.2.4.3. Sai lầm trong khi HS thực hiện phép biến đổi tương đương và rút ra hệ quả.

Nhiều HS không hiểu đâu là điều kiện cần, điều kiện đủ. Trong bài sử dụng kí hiệu $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ một cách tùy tiện, đặc biệt là phép toán kéo theo lại là nguyên nhân dẫn tới nhiều sai lầm. Sự thiếu hiểu biết về các quy tắc suy luận nên dẫn tới sai lầm trong lí luận và chứng minh, có HS cho rằng: Ngay việc sử dụng từ nối “hoặc”, “và” vẫn là điều khó khăn của nhiều HS. Chẳng hạn, khi biến đổi PT tích A.B = 0, HS vẫn viết A = 0 và B = 0.

VD 58: Giải PT sau: $\sqrt{x+4} = x + 2$ (1)

Có HS giải như sau:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \ge 0 \\ x+4 = x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x^2+3x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x(x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm là $\Leftrightarrow x=0, x=-3$

Nhận xét: HS đã sử dụng phép biến đổi tương đương sai:

$$\sqrt{P(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \ge 0 & (1) \\ P(x) = Q^2(x) & (2) \end{cases}$$

Ở đây $f(x) \ge 0$ chỉ là điều kiện tồn tại PT, khi bình phương hai vế của PT được phép biến đổi tương đương khi 2 vế không âm. Vậy để phép biến đổi là tương đương ta có thể lý luận vế trái không âm nếu vế phải âm PT vô nghiệm vậy vế phải dương thì bình phương 2 vế ta được PT tương đương.

Vậy phép biến đổi tương đương phải là:

$$\sqrt{P(x)} = Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = Q^2(x) \\ Q(x) \ge 0 \end{cases}$$

Giải:

$$\sqrt{x+4} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \ge 0 \\ x+4 = (x+2)^2 \end{cases}$$

(đã đảm bảo điều kiện xác định: $x+4 \ge 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x+4 = x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x^2+3x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ x(x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Vậy PT đã cho có một nghiệm là $x=0$

VD 59: Giải PT sau: $\sqrt{(x-3)\left(x^2-x-6\right)}=x^2-7x+12\quad (*)$

Ta xét lời giải sau:

Ta có:

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)(x-3)(x+2)}=(x-3)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow(x-3)\sqrt{(x+2)}=(x-3)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow(x-3)\left[\sqrt{x+2}-(x-4)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \sqrt{x+2}=(x-4)\quad(**)\end{array}\right.$$

Giả PT (**) :

$$\sqrt{x+2}=(x-4)\Leftrightarrow\begin{cases}x-4\geq 0\\ x+2=(x-4)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 4\\ x^2-9x+14=0\end{cases}\Leftrightarrow x=7$$

Vậy PT có 2 nghiệm là $x=3,\ x=7$

Nhận xét:

HS đã sử dụng $\sqrt{f^2(x)h(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)\sqrt{h(x)}=g(x)$ mà lẽ ra phải là:

$$\sqrt{f^2(x)h(x)}=g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)=0\\ g(x)=0\end{cases}\\ \begin{cases}h(x)\geq 0\\ |f(x)|\sqrt{h(x)}=g(x)\end{cases}\end{array}\right.$$

Giải:

Điều kiện: $\left[\begin{array}{c}x=3\\ x+2\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=3\\ x\geq -2\end{array}\right.\Leftrightarrow x\geq -2$

$$\sqrt{(x-3)(x-3)(x+2)}=(x-3)(x-4)$$

$$\Leftrightarrow|x-3|\sqrt{x+2}=(x-3)(x-4)\ (1)$$

Với $x=3$: dễ thấy là nghiệm của PT

Với $x>3$:

PT (1) về dạng $(x-3)\sqrt{x+2}=(x-3)(x-4) \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=x-4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ x^2-9x+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=7$$

Khi $-2 \le x < 3$

$-(x-3)\sqrt{x+2}=(x-3)(x-4)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=4-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \ge x \ge -2 \\ x^2-9x+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \ge x \ge -2 \\ \begin{cases} x=2 \\ x=7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Vậy PT có 3 nghiệm là $x=3,\ x=7,\ x=2$

VD 60: Giải PT $\left(\sqrt{x-1}+1\right)\left(\sqrt{x-1}+3x-10\right)=x-2$ (*)

Có HS giải như sau:

Điều kiện: $x \ge 1$

$(*) \Leftrightarrow (x-2)\left(\sqrt{x-1}+3x-10\right)=(x-2)\left(\sqrt{x-1}-1\right)$

$$\Leftrightarrow (x-2)(3x-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Vậy PT (*) có hai nghiệm $x=2, x=3$.

Nhận xét: Trong lời giải trên, em HS sai lầm trong quy tắc biến đổi tương đương. Quy tắc đó là nếu nhân 2 vế của một PT với cùng một biểu thức khác 0 thì được PT tương đương. Em đã nhân cả 2 vế của PT với một biểu thức trong khi chưa kiểm tra điều kiện biểu thức đó phải khác 0, do đó không được PT tương đương với PT ban đầu. Từ đó ta có lời giải:

Giải:

Điều kiện: $x \ge 1$

+) Nếu $\sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow x=2$, thay vào PT được $2.(-3)=0$ vô lý. Do đó $x=2$ không phải là nghiệm của PT.

+) Nếu $\sqrt{x-1}-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$, nhân hai vế của PT với $\sqrt{x-1}-1$ được:

$(*) \Leftrightarrow (x-2)\left(\sqrt{x-1}+3x-10\right)=(x-2)\left(\sqrt{x-1}-1\right)$

$\Leftrightarrow (x-2)(3x-9)=0 \Leftrightarrow x=3$

Vậy PT (*) có một nghiệm $x=3$.

2.3. Thiết kế một số tình huống dạy học nhằm phát triển năng lực giải PT cho HS THPT

Tình huống 1: Luyện tập phương pháp đưa PT chứa căn thức bậc hai thành một PT với một ẩn phụ.

Giải PT $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$

Bước 1: Tìm hiểu PT

(?) PT có mấy dấu căn bậc hai?

(!) PT có một dấu căn bậc hai.

(?) PT có mấy ẩn số?

(!) PT có 1 ẩn số là x.

(?) Có cần điều kiện cho PT không, Điều kiện là gì?

(!) Vì dưới dấu căn bậc hai có chứa ẩn nên cần phải lấy điều kiện để biểu thức dưới dấu căn bậc hai không âm.

(?) Các biểu thức có mặt trong PT có quan hệ gì?

(!) Biểu thức trong và ngoài căn bậc hai đều là đa thức bậc hai.

(?) Nếu biến đổi vế trái của PT thành đa thức, em có nhận xét gì về các hệ số có mặt ở hai vế của PT?

(!) Hệ số của x^2 và x có giá trị đối nhau.

Bước 2: Tìm cách giải

(?) PT này có dạng nào?

(!) PT có dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$.

(?) Có sử dụng phương pháp lũy thừa để giải không? Tại sao?

(!) Không, vì khi đó vế trái của PT có bậc lớn.

(?) Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}$ $(t \geq 0)$, PT có biến đổi được về PT đại số ẩn t không?

(!) Với $t = \sqrt{x^2 + 3x}$ $(t \geq 0) \Rightarrow t^2 = x^2 + 3x \Rightarrow VT = -t^2 - 10$

Bước 3. Trình bày lời giải

Điều kiện: $x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 0 \end{array}\right.$

$(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2 + 3x} \Leftrightarrow -x^2 - 3x + 10 = 3\sqrt{x^2 + 3x}$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}$ $(t \geq 0) \Rightarrow t^2 = x^2 + 3x \Rightarrow VT = -t^2 - 10$

PT trở thành $-t^2 + 10 = 3t \Leftrightarrow t^2 + 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -5 \end{array}\right.$

Với $t = 2$ thay trở lại cách đặt ta được:

$\sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right.$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -4$.

Bước 4. Nghiên cứu sâu lời giải

(?) Nếu PT chỉ có một căn bậc hai mà bậc của đa thức dưới dấu căn và ngoài căn bằng nhau và lớn hơn hoặc bằng hai, hệ số của ẩn x có giá trị tuyệt đối bằng nhau thì PT có thể giải theo cách nào?

(!) PT giải bằng cách đặt ẩn phụ.

(?) Viết dạng tổng quát của bài toán này?

(!) $\sqrt{a+f(x)}=g(x)+b,(|f(x)|=|g(x)|)$. Đặt $t=\sqrt{a+f(x)}$ $(t\geq 0)$, biến đổi PT về PT mới ẩn t.

Lời bình: Tình huống này đã phát triển cho học sinh năng lực khái quát hóa bài toán dưới dạng tổng quát.

Tình huống 2: Luyện tập phương pháp đưa PT chứa căn thức bậc hai thành một PT với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Giải PT $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2(x^2+1)+2x-1$

Bước 1: Tìm hiểu PT

(?) Tìm hiểu về mối liên hệ giữa các biểu thức trong và ngoài căn bậc hai?

(!) Đều là các đa thức, có bậc khác nhau.

(?) Nếu đặt $t=\sqrt{x^2+1}$ $(t\geq 0)$ thì có đưa được về PT một ẩn t không?

(!) Không, PT vẫn còn ẩn x.

Bước 2: Tìm cách giải

(?) Nếu đặt $t=\sqrt{x^2+1}$ $(t\geq 0)$ và coi x là hằng số thì ta được PT mới ẩn gì?

(!) PT ẩn t.

(?) Viết lại PT dưới dạng PT bậc hai ẩn t?

(!) $2t^2-(4x-1)t+2x-1=0$.

(?) Có thể giải được PT này không?

(!) Giải được, vì $\Delta=16x^2-24x+9=(4x-3)^2$.

Bước 3. Trình bày lời giải

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}$ $(t\geq 0)$. PT trở thành $2t^2-(4x-1)t+2x-1=0$

$\Delta=16x^2-24x+9=(4x-3)^2$

PT có nghiệm $t = 2x - 1$ và $t = \frac{1}{2}$

$$t = 2x - 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + 1 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + 1 = \frac{1}{4}$ (PT vô nghiệm)

Vậy PT đã cho có nghiệm là $x = \frac{4}{3}$.

Bước 4. Nghiên cứu sâu lời giải

(?) Nếu PT khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp. Khi đó ta lựa chọn hướng giải nào?

(!) Hướng 1: Lựa chọn phương pháp khác

Hướng 2: Thử để PT ở dạng: " chứa ẩn phụ nhưng hệ số vẫn còn x"

Lời bình: Tình huống này thường ta được một PT bậc hai theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biệt số Δ là một số chính phương. Qua đó giúp học sinh phát triển năng lực nhìn bài toán theo một hướng khác.

Tình huống 3: Luyện tập phương pháp đưa PT chứa căn thức bậc hai thành một hệ PT với hai ẩn phụ.

Giải PT $\sqrt{3 - x + x^2} - \sqrt{2 + x - x^2} = 1$

Bước 1: Tìm hiểu PT

(?) PT có mấy dấu căn bậc hai?

(!) PT có hai dấu căn bậc hai.

(?) PT có mấy ẩn số?

(!) PT có 1 ẩn số là x.

(?) Có cần điều kiện cho PT không ? Điều kiện là gì?

(!) Vì dưới dấu căn bậc hai có chứa ẩn nên cần phải lấy điều kiện để biểu thức dưới dấu căn bậc hai không âm.

(?) Các biểu thức có mặt trong PT có quan hệ gì?

(!) Biểu thức trong và ngoài căn bậc hai đều là đa thức bậc hai.

(?) Em có nhận xét gì về hệ số của ẩn của hai đa thức dưới dấu căn bậc hai?

(!) Hệ số của x^2 và x có giá trị đối nhau.

Bước 2: Tìm cách giải

(?) Ta có thể đưa PT về dạng PT với một ẩn phụ?

(!) Có.

(?) Đặt biểu thức nào là t?

(!) Đặt $t = \sqrt{2 + x - x^2} \quad (t \geq 0)$.

(?) Biến đổi biểu thức còn lại theo t?

(!) $t = \sqrt{2 + x - x^2} \quad (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 2 + x - x^2 \Rightarrow -x + x^2 = 2 - t^2$. Thay vào PT ta được một PT mới ẩn t.

(?) Do các hệ số của x^2 và x đối nhau về dấu nên PT có thể giải theo cách khác không? Tìm cách đưa PT về một hệ PT với hai ẩn phụ?

(!) Có. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{3 - x + x^2} & (u \geq 0) \\ v = \sqrt{2 + x - x^2} & (u \geq 0) \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = 5$

(?) PT đưa được về hệ PT nào?

(!) $\begin{cases} u - v = 1 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases}$

Bước 3. Trình bày lời giải

Cách 1: Điều kiện: $-1 \le x \le 2$

Đặt $t = \sqrt{2 + x - x^2} \quad (t \ge 0) \Rightarrow t^2 = 2 + x - x^2 \Rightarrow -x + x^2 = 2 - t^2$

PT: $\sqrt{5 - t^2} = 1 + t \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ 5 - t^2 = t^2 + 2t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$

$\Rightarrow \sqrt{2 + x - x^2} = 1 \Leftrightarrow 2 + x - x^2 = 1 \Leftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Vậy PT đã cho có 2 nghiệm là: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Cách 2: Điều kiện: $-1 \le x \le 2$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{3 - x + x^2} \quad (u \ge 0) \\ v = \sqrt{2 + x - x^2} \quad (u \ge 0) \end{cases} \Rightarrow u^2 + v^2 = 5$

PT đưa được về hệ PT $\begin{cases} u - v = 1 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases}$

Giải hệ PT ta được một nghiệm thỏa mãn điều kiện của PT là $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$

Giải PT $-x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bước 4. Nghiên cứu sâu lời giải

(?) Viết dạng tổng quát của bài toán này?

(!) $\sqrt{a - f(x)} + \sqrt{b - f(x)} = c$

Ta có thể đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{a - f(x)} \\ v = \sqrt{b - f(x)} \end{cases}$, suy ra $u \ \ + v \ \ = a + b$

Khi đó ta thu được hệ PT: $\begin{cases} u \ \ +v \ \ =a+b \\ u+v=c \end{cases}$

Lời bình: Bên cạnh phương pháp đặt ẩn phụ, có rất nhiều bài toán cần dùng nhiều ẩn số phụ và tùy theo đặc thù của bài toán đã cho, ta thu được các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng. Từ đó có thể đưa PT thành một hệ PT đã biết cách giải. Tình huống này đã phát triển cho học sinh năng lực khái quát hóa bài toán dưới dạng tổng quát.

Tình huống 4: Luyện tập phương pháp giải PT không mẫu mực

Giải PT $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$

Bước 1: Tìm hiểu PT

(?) PT có mấy căn bậc hai?

(!) PT có bốn căn bậc hai trong đó biểu thức dưới dấu căn lại chứa một căn bậc hai.

(?) PT này đã gặp bao giờ chưa?

(!) Chưa, nên không thể giải trực tiếp bằng các phương pháp đã học.

(?) Hãy tìm mối liên hệ giữa các số, các chữ và các biểu thức dưới dấu căn?

(!) Với sự xuất hiện của $-2\sqrt{x-1}$ và $-4\sqrt{x-1}$ nên có thể phân tích $x-2\sqrt{x-1}$ và $x+3-4\sqrt{x-1}$ thành các hằng đẳng thức.

(?) Có cần tìm điều kiện để biểu thức dưới dấu căn có nghĩa không?

(!) Vì dưới dấu căn bậc hai có chứa ẩn nên cần phải lấy điều kiện để biểu thức dưới dấu căn bậc hai không âm.

Bước 2: Tìm cách giải

(?) Hãy phân tích $x-2\sqrt{x-1}$ và $x+3-4\sqrt{x-1}$ thành các hằng đẳng thức?

(!) $x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1})^2-2\sqrt{x-1}+1=(\sqrt{x-1}-1)^2$

$x+3-4\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1})^2-4\sqrt{x-1}+4=(\sqrt{x-1}-2)^2$.

(?) PT đã cho đưa được về PT nào?

(!) PT chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

(?) Có thể sử dụng phương pháp nào để giải PT này?

(!) Sử dụng tính chất, chia khoảng hoặc đặt ẩn phụ.

Bước 3. Trình bày lời giải

Cách 1: Sử dụng tính chất

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}-2\right|=1$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}-1\right|+\left|\sqrt{x-1}-2\right|=\sqrt{x-1}-1-\sqrt{x-1}+2=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}-1\geq 0\\ \sqrt{x-1}-2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 2\\ x\leq 5\end{cases}\Leftrightarrow 2\leq x\leq 5$$

Cách 2: Phương pháp chia khoảng

x	$-\infty$		1		2		5		$+\infty$
$\sqrt{x-1}-1$			|	-	0	+	|	+	
$\sqrt{x-1}-2$			|	-	|	-	0	+	

TH1: $1<x\leq 2$: ta được PT $1<x\leq 2: -\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+2=1$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x-1}=-2\Rightarrow x=2$$

TH2: $2<x<5: \sqrt{x-1}-1-\sqrt{x-1}+2=1;\ \forall x\in(2;5)$

TH3: $x\geq 5: \sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}-2=1\Rightarrow 2\sqrt{x-1}=4\Rightarrow x=5$

Vậy PT đã cho có nghiệm $2\leq x\leq 5$.

Cách 3: Phương pháp đặt ẩn phụ

Hướng dẫn: Điều kiện $x\geq 1$. Đặt $t=\sqrt{x-1};\ (t\geq 0)$

PT trở thành $|t-1|+|t-2|=1$

Học sinh tự giải PT này bằng phương pháp của PT chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

Bước 4. Nghiên cứu sâu lời giải

(?) Đặc điểm đặc biệt PT này là gì?

(!) Các biểu thức dưới dấu căn phân tích được thành hằng đẳng thức.

(?) Từ PT chứa ẩn dấu căn bậc hai biến thành PT nào?

(!) Thành PT chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

Lời bình: Không phải mọi bài toán đều có sẵn phương pháp giải, có những bài toán đòi hỏi người giải phải có năng lực toán học như: phân tích, tổng hợp, quy lạ về quen, dự đoán...để tìm lời giải. Tuy nhiên loại bài toán này có thể khiến người giải chán nản vì không tìm được hướng giải, dẫn đến mất hứng thú và yêu thích bộ môn. Nhưng ngược lại, nếu tìm ra được lời giải với những bài toán mà mình chưa gặp bao giờ lại là động lực, niềm vui và tự hào về bản thân. Thúc đẩy người học thích tìm tòi và khám phá những điều thú vị từ những bài toán mới. Qua đó, người học còn tích lũy được nhiều kinh nghiệm quý báu để giải các bài toán khác.

2.4. Một số bài toán luyện tập nhằm phát triển năng lực giải PT chứa căn thức cho HS

2.4.1. Dạng 1: Giải PT chứa căn thức bằng phương pháp lũy thừa

Bài 1. Giải PT: $\sqrt{x^2-2x-4}=\sqrt{2-x}$.

Bài 2. Giải PT: $\sqrt{3x^2-9x+1}=x-2$.

Bài 3. Giải PT: $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$.

Bài 4. Giải PT: $\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x}$.

Bài 5. Giải PT: $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

Bài 6. Giải PT: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$.

Bài 7. Giải PT: $\sqrt{11-x}-\sqrt{x-1}=2$.

Bài 8. Giải PT: $\sqrt{3x^2-9x+1}=|x-2|$.

Bài 9. Giải PT: $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3$.

Bài 10. Giải PT: $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$.

2.4.2. Dạng 2: Dùng ẩn phụ chuyển PT chứa căn thức thành một PT với một ẩn phụ

Bài 11. Giải PT: $(x+1)(x+4)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

Bài 12. Giải PT: $\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}+\sqrt{(1+x)(8-x)}=3$.

Bài 13. Giải PT: $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$.

Bài 14. Giải PT: $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$.

Bài 15. Giải PT: $\sqrt{(x+1)(2-x)}=1+2x-2x^2$.

Bài 16. Giải PT: $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=4$.

Bài 17. Giải PT: $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$.

Bài 18. Giải PT: $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$.

Bài 19. Giải PT: $(x-1)(x+2)+2(x-1)\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=8$.

Bài 20. Giải PT: $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$.

2.4.3. Dạng 3: Dùng ẩn phụ chuyển PT chứa căn thức thành một hệ PT với hai ẩn phụ.

Bài 21. Giải PT: $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

Bài 22. Giải PT: $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

Bài 23. Giải PT: $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

Bài 24. Giải PT: $\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{x^2-3x+6}=3$.

Bài 25. Giải PT: $\sqrt{3-x+x^2}-\sqrt{2+x-x^2}=1$.

2.4.4. Dạng 4: Dùng ẩn phụ chuyển PT chứa căn thức thành một PT với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Bài 26. Giải PT: $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2\left(x^2+1\right)+2x-1$.

Bài 27. Giải PT: $x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}$.

Bài 28. Giải PT: $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$.

Bài 29. Giải PT: $x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$.

2.5. Tiểu kết chương 2

Trong chương 2, luận văn đã nêu lên một số biện pháp nhằm phát triển năng lực giải PT cho HS phổ thông, đó là:

1. Rèn luyện cho HS một số kĩ năng giải PT chứa căn thức cơ bản.
2. Trang bị và luyện tập cho HS phương pháp chung để giải PT chứa căn thức.
3. Tập luyện cho HS vận dụng quy trình giải toán theo bốn bước của G.Polya vào giải PT.
4. Rèn luyện cho HS tính linh hoạt, sáng tạo bằng cách khuyến khích HS giải PT bằng nhiều cách.

Để rèn luyện năng lực giải PT chứa căn thức cho HS, GV cần chú ý trước hết cần phải trang bị cho HS có kiến thức, có kĩ năng, có phương pháp cụ thể, nhưng đồng thời cũng cần chú trọng đến thái độ, hứng thú học tập, khả năng linh hoạt, sáng tạo tìm được nhiều hướng giải của các em. Trong luận văn cũng nêu ra các ví dụ, các tình huống nhằm minh họa và là một cách vận dụng các biện pháp đã đề ra.

Chương 3. THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

3.1. Mục đích, nhiệm vụ thực nghiệm sư phạm

3.1.1. Mục đích thực nghiệm

Thực nghiệm sư phạm được tiến hành nhằm kiểm nghiệm tính khả thi và tính hiệu quả của việc sử dụng các biện pháp đã đề xuất và việc sử dụng hệ thống bài tập đã xây dựng nhằm phát triển năng lực giải PT chứa căn thức cho HS THPT.

3.1.2. Nhiệm vụ thực nghiệm sư phạm

- Soạn tài liệu thực nghiệm theo hướng phát triển năng lực giải toán PT chứa căn thức cho học sinh;

- Cùng GV thực dạy nghiên cứu và đề xuất một số giáo án thực nghiệm phù hợp với đối tượng HS;

- Đánh giá chất lượng thực nghiệm, hiệu quả, tính khả thi của việc phát triển năng lực giải PT chứa căn thức cho HS.

3.2. Nội dung thực nghiệm

Chúng tôi đã tiến hành thực nghiệm dạy học các nội dung:

- Dạy học giải PT chứa căn thức bằng phương pháp nâng lên lũy thừa;

- Dạy học giải PT chứa căn thức bằng phương pháp đặt ẩn phụ;

Nội dung các tiết dạy thực nghiệm được soạn theo giáo án lên lớp trên cơ sở kiến thức của SGK Đại số 10.

3.3. Tổ chức thực nghiệm

3.3.1. Đối tượng thực nghiệm

- HS các lớp 10A3, 10A4 trường THPT Mộc Ly, huyện Mộc Châu, tỉnh Sơn La.

- GV giảng dạy: Nguyễn Thị Minh, GV trường THPT Mộc Ly, huyện Mộc Châu, tỉnh Sơn La.

3.3.2. Thời gian thực nghiệm

- Thời gian giảng dạy thực nghiệm: Chúng tôi lựa chọn dạy thực nghiệm trong 2 tiết, vào các giờ học tự chọn tháng 3 năm 2016.

- Hình thức: Dự giờ tiết dạy giáo án mẫu.

3.3.3. Giáo án thực nghiệm sư phạm

Giáo án thực nghiệm, xem phụ lục 2

3.4. Đánh giá kết quả thực nghiệm

3.4.1. Đánh giá về nội dung, phương pháp dạy học thực nghiệm

Mẫu phiếu lấy ý kiến, xem phụ lục số 1

3.4.1.1. Đánh giá từ bài kiểm tra

Đề kiểm tra

(Thời gian 45 phút)

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7}=\sqrt{12-x}$

Bài 2. Giải phương trình $x^2+\sqrt{x+1}=1$

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$

Mục tiêu khi ra đề kiểm tra

Nhằm phát triển năng lực giải phương trình chứa căn thức bằng phương pháp nâng lên lũy thừa, phương pháp đặt ẩn phụ, kiểm tra các kĩ năng biến đổi, phân tích, tách ghép của học sinh. Qua đó nhằm đánh giá kiến thức cũng như kết quả của học sinh.

3.4.1.2. Đánh giá kết quả học tập

Kết quả học tập của học sinh hai lớp 10A3 và 10A4 được thể hiện qua bảng thống kê sau đây:

Điểm	Lớp 10A3 (Thực nghiệm)		Lớp 10A4 (Đối chứng)	
	Số HS	Tỉ lệ %	Số HS	Tỉ lệ %
Từ 0 đến dưới 3	0	0,0	0	0,0
Từ 3 đến dưới 5	2	4,7	7	16,3
Từ 5 đến dưới 7	25	58,1	27	62,8
Từ 7 đến dưới 9	13	30,2	8	18,6
Từ 9 đến 10	3	7,0	1	2,3
Cộng	43	100	43	100

*** Nhận xét qua các bài kiểm tra học sinh của các lớp thực nghiệm.**

Qua kiểm tra đánh giá kết quả thực nghiệm đề tài, bước đầu tôi thấy các em đã có tiến bộ, biết vận dụng kiến thức cơ bản, chuyên sâu một cách khoa học và hiệu quả hơn, có kĩ năng tốt hơn trong việc giải phương trình chứa căn thức cơ bản và các dạng bài tập đã dạy.

3.4.2. Kết luận chung của thực nghiệm sư phạm

Sau quá trình tổ chức thực nghiệm sư phạm, chúng tôi đã theo dõi sự chuyển biến trong hoạt động học tập của HS, đặc biệt là các kỹ năng nghe giảng, ghi chép, thảo luận, đặt câu hỏi, tự đánh giá... Bước đầu rèn luyện cho HS có thói quen tự học, có kỹ năng giải quyết các vấn đề đặt ra, chủ động trong việc lĩnh hội kiến thức mới. Chúng tôi nhận thấy lớp thực nghiệm có chuyển biến tích cực hơn so với trước thực nghiệm:

- *HS hứng thú trong giờ học Toán*: Điều này được giải thích là do trong quá trình học tập, HS được GV hệ thống các kiến thức về PT chứa căn thức và những kiến thức cơ sở nền tảng về phương trình nên các em được hoạt động, được suy nghĩ, được tự do bày tỏ quan điểm, được tham gia vào quá trình phát hiện, định hướng lời giải nhiều hơn; được tham gia vào quá trình khám phá và kiến tạo kiến thức mới.

- *Khả năng phân tích, tổng hợp, so sánh, tương tự, khái quát hóa, đặc biệt hóa, hệ thống hóa của HS tiến bộ hơn*: Điều này được giải thích là do GV đã chú ý hơn trong việc phát triển cho HS năng lực biến đổi bài toán về dạng thuận lợi, phù hợp với kiến thức đã có của HS và điều kiện đã cho của bài toán để tìm hướng giải quyết bài toán.

- *HS đã tập trung chú ý nghe giảng, thảo luận nhiều hơn, tranh luận để đưa ra ý kiến hoặc lời giải của mình*: Điều này được giải thích là do GV đã chú ý và phát triển cho HS năng lực nhìn nhận bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau từ đó tìm nhiều cách giải, qua đó HS có thể vận dụng tổng hợp kiến thức đã học và chọn lựa được lời giải phù hợp, tạo phản xạ khi tiếp xúc với bài toán.

- *Việc đánh giá, tự đánh giá bản thân của HS được sát thực hơn*: Có được điều này là do trong quá trình dạy học, GV đã cho HS thảo luận giữa thầy và trò, trò với trò được trả lời bằng các phiếu trắc nghiệm và khả năng suy luận của bản thân.

- *HS tự học, tự nghiên cứu bài ở nhà thuận lợi hơn*: Điều này được giải thích là do trong các tiết học ở trên lớp, GV đã quan tâm tới việc hướng dẫn HS tổ chức việc tự học, tự nghiên cứu sách giáo khoa, sách tham khảo ở nhà.

- HS tham gia vào bài học sôi nổi hơn, tự tin, mạnh dạn hơn trong việc bộc lộ kiến thức, dám nói lên suy nghĩ của chính mình về một bài toán, một vấn đề, không dập khuôn một cách máy móc, thiếu tư duy khi nhìn nhận bài toán hay một vấn đề cụ thể: Điều này là do trong quá trình dạy học, GV đã phát triển cho HS thói quen không suy nghĩ cứng nhắc theo những quy tắc đã học, không máy móc áp dụng những mô hình đã gặp để ứng xử trước những tình huống mới.

3.5. Tiểu kết chương 3

Để kiểm chứng tính khả thi và hiệu quả của biện pháp đã đề ra ở chương 2, chương 3 luận văn đã xây dựng:

- Mục đích, nội dung thử nghiệm và cách thức tổ chức.
- Các giáo án thử nghiệm.
- Đưa ra một số nhận xét, đánh giá kết quả.

Việc vận dụng một số biện pháp dạy học nhằm phát triển năng lực giải PT chứa căn thức cho HS đã bước đầu đạt những kết quả nhất định: HS được lôi cuốn vào thực hiện các hoạt động một cách tích cực, tự giác thực hiện các hoạt động, tạo hứng thú học tập.

Kết quả thử nghiệm đã bước đầu khẳng định tính hiệu quả và khả thi của các biện pháp đã được đề xuất trong luận văn.

KẾT LUẬN CHUNG

Sau quá trình nghiên cứu, luận văn đã đạt được những kết quả sau:

- Trình bày được những nét cơ bản về năng lực giải toán, yêu cầu phát triển năng lực, năng lực giải toán cho học sinh.

- Điều tra thực tiễn dạy học ở trường phổ thông về giải PT chứa căn thức và vấn đề phát triển năng lực cho học sinh làm cơ sở thực tiễn cho đề tài.

- Đề xuất được bốn biện pháp phát triển năng lực giải PT chứa căn thức cho HS.

- Nêu một số bài tập về PT chứa căn thức có thể sử dụng để phát triển năng lực giải toán cho HS.

- Đã tiến hành thực nghiệm sư phạm để bước đầu kiểm nghiệm tính khả thi của đề tài.

Vì điều kiện còn hạn chế về thời gian, luận văn còn có nhiều khiếm khuyết, mong được sự góp ý của các thầy cô, đồng nghiệp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] V.A. Cruchetxki (1980), *Những cơ sở Tâm lí học sư phạm*, Tập 1, Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[2] Nguyễn Hữu Châu (1995), *Dạy học giải quyết vấn đề trong môn Toán*, Tạp chí Nghiên cứu giáo dục, số 9/1995.

[3] Nguyễn Thế Chinh (2005), *Bồi dưỡng năng lực khái quát hóa, đặc biệt hóa và tương tự hóa cho học sinh qua chủ đề ứng dụng bất đẳng thức Cô – si,* Luận văn thạc sĩ.

[4] Nguyễn Tài Chung (2014), *Sáng tạo và giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình,* Nhà xuất bản tổng hợp TP. Hồ Chí Minh.

[5] Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên) (2012), *Đại số 10*, NXB Giáo dục.

[6] Phạm Văn Hoàn, Trần Thúc Trình (1975), *Một số ý kiến về việc rèn luyện con người dạy Toán*, Tạp chí Nghiên cứu giáo dục.

[7] Bùi Duy Hưng (2014), Dạy học môn Toán ở THPT theo hướng phát triển năng lực cho học sinh, *Tạp chí giáo dục,* Số 325.

[8] Nguyễn Công Khanh (2013), *Năng lực và đánh giá kết quả giáo dục theo năng lực trong chương trình giáo dục phổ thông sau năm 2015.*

[9] Nguyễn Bá Kim (2014), *Giáo dục Toán học tập trung vào phát triển năng lực,* Tạp chí khoa học Đại học sư phạm Hà Nội số 2A/2014 VN.

[10] Nguyễn Bá Kim (2009), *PPDH môn Toán,* Nxb Đại học Sư phạm.

[11] Nguyễn Bá Kim (2011), *Phương pháp dạy học môn Toán,* NXB Đại học sư phạm, Hà Nội.

[12] *Luật giáo dục* (Được sửa đổi, bổ sung năm 2009) (2010), Nhà xuất bản tư pháp Hà Nội.

[13] Bùi Văn Nghị (2014), *Phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn Toán,* NXB Đại học sư phạm, Hà Nội.

[14] Bùi Văn Nghị (2014), *Giáo dục Toán học hướng vào năng lực người học* (2014), Tạp chí khoa học Đại học sư phạm Hà Nội số 2A/2014 VN.

[15] G. Polya (2009), *Giải một bài toán như thế nào?,* NXB Giáo dục Hà Nội.

[16] Polya G (1997), *Sáng tạo toán học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[17] Trần Phương, Lê Hồng Đức (2014), *Tuyển tập các chuyên đề luyện thi đại học môn Toán sơ cấp,* Nhà xuất bản đại học quốc gia Hà Nội.

[18] Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng (2007), *Đại số 10 Nâng cao,* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[19] Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng (2008), *Đại số & Giải tích 11 Nâng cao,* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[20] Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan, Trần Phương Dung, Nguyễn Xuân Liêm, Đặng Hùng Thắng, *Giải tích 12 Nâng cao* (2009) Nxb Giáo dục, Hà Nội.

[21] Nguyễn Triệu Sơn, Nguyễn Đình Yên (2016), *Giáo trình lý thuyết tập hợp và logic toán*, NXBĐHQG Hà Nội.

[22] Nguyễn Triệu Sơn (2016), *Giáo trình chuyên đề phương pháp dạy học toán*, NXBĐHSP

[23] Nguyễn Triệu Sơn, Nguyễn Thanh Tùng (2016), *Rèn luyện phương pháp giải một số dạng thường gặp của bài toán dãy số*, NXBGDVN.

[24] Nguyễn Thế Thạch (2009), *Hướng dẫn thực hiện chuẩn kiến thức, kĩ năng môn Toán lớp 10*, NXB Giáo dục Việt Nam.

PHỤ LỤC

1. Phụ lục 1: Phiếu điều tra

1.1. Phiếu điều tra giáo viên

1.1.1. Phiếu số 1:

Xin các thầy cô cho biết ý kiến của mình về các vấn đề sau, bằng cách khoanh tròn vào lựa chọn thích hợp

1: Theo thầy cô giáo dạng toán giải phương trình chứa căn thức là dạng toán quan trọng hay không? Vì sao?

A. Bình thường

B. Quan trọng

C. Rất quan trọng

2: Theo thầy cô chỉ rèn luyện kĩ năng giải phương trình chứa căn thức cho HS theo mức độ sách giáo khoa, sách bài tập thì HS có đủ kĩ năng làm bài thi THPT Quốc gia không?

A. Chưa đủ

B. Đã đủ

3: Theo thầy cô với số tiết quy định trong chương trình thì HS của thầy cô đã giải phương trình chứa căn thức ở mức độ nào?

A. Chưa biết giải phương trình chứa căn thức

B. Chỉ giải được những bài toán đơn giản

C. Giải thành thạo những bài toán kể cả những bài khó trong quá trình học

4: Theo thầy cô những khó khăn nào sau đây được thể hiện nhiều nhất ở HS?

A. Không biết nhận dạng

B. Không biết cách giải

C. Có biết cách giải nhưng không giải được.

Xin chân thành cảm ơn quý thầy cô.

1.1.2. Phiếu số 2:

Xin các thầy cô cho biết ý kiến của mình về giáo án và giờ dạy thực nghiệm sư phạm, bằng cách khoanh tròn vào lựa chọn thích hợp

1: Theo các thầy cô giáo án TNSP có tính khả thi, thời gian phân phối có hợp lý không?

A. Có tính khả thi và hợp lý

B. Chưa khả thi

C. Bình thường

2: Theo các thầy cô giáo án TNSP có góp phần phát triển tốt về kĩ năng cho học sinh không?

A. Phát triển tốt

B. Bình thường

C. Không

3: Theo các thầy cô giáo án TNSP có quan trọng để góp phần nâng cao chất lương dạy học cho học sinh không?

A. Quan trọng

B. Rất quan trọng

C. Bình thường

4: Theo các thầy cô giáo án TNSP có tạo được hứng thú cho học sinh không?

A. Rất hứng thú

B. Hứng thú

C. Bình thường

Xin chân thành cảm ơn quý thầy cô.

1.2. Phiếu điều tra học sinh

Các em cho biết ý kiến của mình về các vấn đề sau, bằng cách khoanh tròn vào lựa chọn thích hợp

1: Các em có hứng thú khi học giờ dạy thực nghiệm không?

A. Rất hứng thú

B. Hứng thú

C. Bình thường

2: Các em cho ý kiến về hệ thống các bài tập thực nghiệm?

A. Phù hợp

B. Dễ

C. Khó

3: Các em nhận thấy kĩ năng giải PT chứa căn thức của mình đạt đến mức nào?

A. Một chút

B. Tương đối

C. Rất nhiều

4: Các em thấy tiến bộ nhất ở kĩ năng nào trong giải PT chứa căn thức dạng nào?

A. Nâng lên lũy thừa

B. Phân tích nhân tử

C. Đặt ẩn phụ

Xin cảm ơn các em.

2. Phụ lục 2: Giáo án thực nghiệm

Tiết 1. Luyện tập giải phương trình chứa căn thức bằng phương pháp nâng lên lũy thừa.

I. Mục tiêu

1. Về kiến thức:

HS nắm được một số dạng PT chứa căn thức giải bằng phương pháp lũy thừa. Củng cố các phép biến đổi hệ quả, phép biến đổi tương đương.

2. Về kỹ năng:

Củng cố, ôn tập lại các kỹ năng như tìm tập xác định, phân tích thành tích, giải PT bậc nhất, bậc hai một ẩn và cách kết hợp nghiệm.

3. Về tư duy: Rèn luyện tư duy thuật giải, tư duy logic, tư duy phê phán.

4. Về thái độ: Tự giác, chủ động, tích cực, hợp tác giúp đỡ lẫn nhau.

II. Chuẩn bị

1. Giáo viên: Chuẩn bị phiếu học tập cho các nhóm, bài giảng điện tử. Báo trước HS hình thức học theo nhóm và phân nhóm.

2. Học sinh:

Ôn tập các kiến thức về PT chứa ẩn dưới dấu căn; các phép biến đổi tương đương, không tương đương…

III. Phương pháp dạy học

Kết hợp các PPDH: đàm thoại; phát hiện và giải quyết vấn đề; dạy học hợp tác theo nhóm nhỏ.

IV. Nội dung và hoạt động dạy học

Hoạt động 1: Giải phương trình $\sqrt{2x+7} = x+2$

Hoạt động của GV	Hoạt động của học sinh	Nội dung
Giải PT	- Tìm điều kiện	$\sqrt{2x+7} = x+2$

$\sqrt{2x+7}=x+2$ (?) Đã gặp PT dạng này chưa? (?) Có thể sử dụng phương pháp lũy thừa để giải không? (?) Yêu cầu HS thực hiện lời giải. + GV chính xác hóa kiến thức + Tổng hợp cách giải đối với dạng PT $\sqrt{f(x)}=g(x)$.	cho PT. - Suy nghĩ tìm lời giải. - Phân tích: + PT có dạng $\sqrt{f(x)}=g(x)$ + Nếu sử dụng phương pháp lũy thừa thì được một PT bậc 2 một ẩn đã biết cách giải. + Trình bày lời giải	$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 2x+7=(x+2)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 2x^2-5x-3=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Hoạt động 2: Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$ (2)

Hoạt động của GV	Hoạt động của học sinh	Nội dung
Giải PT $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$ (?) Đã gặp PT dạng này chưa? (?) PT có dạng $\sqrt{f(x)}=g(x)$ (?) Có thể sử dụng phương pháp lũy thừa để giải không?	- Tìm điều kiện cho PT. - Suy nghĩ tìm lời giải. - Phân tích: + PT có thể đưa về dạng $\sqrt{f(x)}=g(x)$ + Nếu sử dụng	Điều kiện: $\begin{cases} 3x+1\ge 0 \\ x+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{3}$ $(2)\Leftrightarrow 4x+5-2\sqrt{(3x+1)(x+4)}=1$ $\Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x+4)}=2x+2$

(?) Yêu cầu HS thực hiện lời giải. + GV chính xác hóa kiến thức + Tổng hợp cách giải đối với dạng PT $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=h(x)$.	phương pháp lũy thừa thì được một PT bậc 2 một ẩn đã biết cách giải. + Trình bày lời giải	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\frac{1}{3} \\ (3x+1)(x+4)=(2x+2)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x^2-5x=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=5 \end{array}\right.$

Hoạt động 3: Giải phương trình $\sqrt{x-1}=5-2\sqrt{3x-2}$

Hoạt động của GV	Hoạt động của học sinh	Nội dung
Giải PT $\sqrt{x-1}=5-2\sqrt{3x-2}$ (?) Đã gặp PT dạng này chưa? (?) PT có dạng $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=h(x)$ (?) Có thể sử dụng phương pháp lũy thừa để giải không? Vì chưa chắc vế phải âm hay dương,	- Tìm điều kiện cho PT. - Suy nghĩ tìm lời giải. - Phân tích: + PT có thể đưa về dạng $\sqrt{f(x)}=g(x)$ + Nếu sử dụng phương pháp lũy thừa thì được một PT bậc 2 một ẩn đã	Giải phương trình $\sqrt{x-1}=5-2\sqrt{3x-2}$ Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$ Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{x-1}+2\sqrt{3x-2}=5$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+2\sqrt{3x-2}\right)^2=25$

nên nếu bình phương hai vế thì sẽ cần thêm điều kiện $$2\sqrt{3x-2}\le 5,$$ còn nếu chuyển vế $2\sqrt{3x-2}$ sang vế phải thì lúc đó thu được vế phải là tổng hai căn thức; khi đó hai vế đều không âm nên có thể thực hiện phép bình phương. (?) Yêu cầu HS thực hiện lời giải. + GV chính xác hóa kiến thức	biết cách giải. + Trình bày lời giải	$\Leftrightarrow 4\sqrt{(x-1)(3x-2)}=34-13x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 34-13x\ge 0 \\ 16(x-1)(3x-2)=(34-13x)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \frac{34}{13} \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{562}{121} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Hoạt động 4: Tổng kết, nhận xét và rút kinh nghiệm.

GV tổng hợp một số dạng PT giải được bằng phương pháp lũy thừa. Nhận xét các hoạt động của các nhóm và rút kinh nghiệm hoạt động nhóm, giao bài tập về nhà và kết thúc giờ học.

Bài tập về nhà:

+ Hệ thống lại các dạng PT chứa căn thức giải bằng phương pháp luỹ thừa.

+ Làm bài tập: Giải các PT sau

Bài 1. $\sqrt{11-x}-\sqrt{x-1}=2$.

Bài 2. $\sqrt{3x^2-9x+1}=|x-2|$.

Bài 3. $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3$.

Bài 4. $\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x}$

Bài 5. $\sqrt{11-x}-\sqrt{x-1}=2$

Bài 6. $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

Tiết 2. Luyện tập giải phương trình chứa căn thức bằng phương pháp đặt ẩn phụ

I. Mục tiêu

1. Về kiến thức:

HS nắm được một số dạng PT chứa căn thức giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Củng cố các phép biến đổi hệ quả, phép biến đổi tương đương, tìm điều kiện cho ẩn phụ.

2. Về kỹ năng:

Có kỹ năng giải các PT chứa căn thức cơ bản bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

Củng cố, ôn tập lại các kỹ năng như tìm tập xác định, phân tích thành tích và cách kết hợp nghiệm.

3. Về tư duy: Rèn luyện tư duy thuật giải, tư duy logic, tư duy phê phán.

4. Về thái độ: Tự giác, chủ động, tích cực, hợp tác giúp đỡ lẫn nhau.

II. Chuẩn bị

1. Giáo viên: Chuẩn bị phiếu học tập cho các nhóm. Báo trước HS hình thức học theo nhóm và phân nhóm. Chuẩn bị các phương tiện dạy học.

2. Học sinh:

+ Ôn tập các kiến thức về PT chứa ẩn dưới dấu căn; các phép biến đổi tương đương, không tương đương…

III. Phương pháp dạy học

Kết hợp các PPDH: đàm thoại; phát hiện và giải quyết vấn đề; dạy học hợp tác theo nhóm nhỏ.

IV. Nội dung và hoạt động dạy học

Hoạt động 1: Giải PT $2(x^2-2x)+\sqrt{x^2-2x-3}-9=0$

Hoạt động của GV	Hoạt động của học sinh	Nội dung
(?) Đã gặp PT dạng này chưa? (?) Có thể sử dụng phương pháp lũy thừa để giải không? Gợi ý: Nhận thấy x^2-2x và x^2-2x-3 có hệ số của ẩn bằng nhau (?) Yêu cầu HS thực hiện lời giải. + GV chính xác hóa kiến thức	- Tìm điều kiện cho PT. - Suy nghĩ tìm lời giải. - Phân tích: + nếu đưa PT về dạng $\sqrt{f(x)}=g(x)$ và bình phương hai vế của PT thì được PT bậc 4 phức tạp, khó tìm ra cách giải. + Đặt $t=\sqrt{x^2-2x-3}$ thì có thể đưa PT về PT với một ẩn phụ t. + Trình bày lời giải	$2(x^2-2x)+\sqrt{x^2-2x-3}-9$ Điều kiện: $x^2-2x-3\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 3 \\ x\leq -1 \end{array}\right.$ Đặt $t=\sqrt{x^2-2x-3}, (t\geq 0)$ $\Rightarrow x^2-2x=t^2+3$ $(3)\Leftrightarrow 2(t^2+3)+t-9=0$ $\Leftrightarrow 2t^2+t-3=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t=1$ $t=1\Rightarrow \sqrt{x^2-2x-3}=1$ $\Leftrightarrow x^2-2x-4=0$ $\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$

Hoạt động 2: Giải PT $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$ (1)

Hoạt động của GV	Hoạt động của học sinh	Nội dung

(?) Đã gặp PT dạng này chưa? (?) PT có dạng nào (?) Có thể sử dụng phương pháp lũy thừa để giải không? (?) Nếu chuyển PT về dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ thì việc giải có khó khăn (?) Yêu cầu HS thực hiện lời giải. + GV chính xác hóa kiến thức	- Tìm điều kiện cho PT. - Suy nghĩ tìm lời giải. - Phân tích: Nếu chuyển PT về dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ thì việc giải có khó khăn Bởi khi bình phương hai vế thì $g^2(x)$ phức tạp + Trình bày lời giải	*Giải:* Để khử dạng vô tỉ, ta chọn $u = \sqrt{x^2+1} \geq 1$ PT đã cho biến đổi về dạng $(4x-1)u = 2u^2 + 2x - 1$ $\Leftrightarrow 2u^2 - (4x-1)u + 2x - 1 = 0$ Là PT đối với u mà hệ số vẫn còn chứa x $\Delta = (4x-1)^2 - 8(2x-1)$ $= (4x-3)^2$ PT đối với u có các nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} u = \dfrac{4x-1+(4x-3)}{4} \\ u = \dfrac{4x-1-(4x-3)}{4} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2x-1 \\ u = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ Ta giải PT: $\sqrt{x^2+1} = 2x-1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x^2+1 = (2x-1)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}.$

		Vậy PT có nghiệm là $x = \dfrac{4}{3}$

Hoạt động 3: Giải PT $\sqrt{25 - x^2} - \sqrt{9 - x^2} = 2$

Hoạt động của GV	Hoạt động của học sinh	Nội dung
(?) Đã gặp PT dạng này chưa? (?) Có thể sử dụng phương pháp lũy thừa hay đặt một ẩn phụ để để giải không? Nếu đặt một ẩn phụ thì chọn biểu thức nào? (?) Yêu cầu HS thực hiện lời giải. + GV chính xác hóa kiến thức	- Tìm điều kiện cho PT. - Suy nghĩ tìm lời giải. - Phân tích: Nếu đặt một ẩn phụ thì chọn biểu thức nào? Đặt $\sqrt{25 - x^2} = u$ $\sqrt{9 - x^2} = v$ đưa về hệ PT hai ẩn *u, v* + Trình bày lời giải	Giải PT: $\sqrt{25 - x^2} - \sqrt{9 - x^2} = 2$ *Giải:* Điều kiện: $\begin{cases} 25 - x^2 \ge 0 \\ 9 - x^2 \ge 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ -3 \le x \le 3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow -3 \le x \le 3$ Đặt: $\sqrt{25 - x^2} = u$, $\sqrt{9 - x^2} = v \; (u, \; v \ge 0)$ $\Rightarrow \begin{cases} u - v = 2 \\ u^2 - v^2 = 16 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 2 \\ u + v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 3 \end{cases}$ Thế trở lại: $x = 0$ là nghiệm duy nhất.

Hoạt động 4: Tổng kết, nhận xét và rút kinh nghiệm.

GV tổng hợp một số dạng PT sử dụng đặt ẩn phụ để giải. Nhận xét các hoạt động của các nhóm và rút kinh nghiệm hoạt động nhóm, giao bài tập về nhà và kết thúc giờ học.

Bài tập về nhà:

+ Hệ thống lại các dạng PT chứa căn thức giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ.

+ Làm bài tập: Giải các PT sau

Bài 1. $(x+1)(x+4)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

Bài 2. $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$.

Bài 3. $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$

Bài 4. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

Bài 5. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

3. Phụ lục 3: Các đề kiểm tra và đáp án

3.1. Đề kiểm tra trong chương 3

Đề kiểm tra

(Thời gian 45 phút)

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7}=\sqrt{12-x}$

Bài 2. Giải phương trình $x^2+\sqrt{x+1}=1$

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$

Đáp án

Nội dung	Điểm
Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7}=\sqrt{12-x}$	3,0đ
Với điều kiện $7\le x\le 12$. Ta có:	0,5đ
$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7}=\sqrt{12-x}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{12-x}+\sqrt{x-7}$	0,75đ

$\Leftrightarrow x+1=5+2\sqrt{(12-x)(x-7)}$	
$\Leftrightarrow 2\sqrt{19x-x^2-84}=x-4$	0,25đ
$\Leftrightarrow 4(19x-x^2-84)=x^2-8x+16$	0,5đ
$\Leftrightarrow 76x-4x^2-336-x^2+8x-16=0$	0,5đ
$\Leftrightarrow \quad 5x^2-84x+352=0$	0,25đ
$\Leftrightarrow x=\frac{44}{5},\ x=8$ Vậy: phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{44}{5},\ x=8$	0,25đ
Bài 2: Giải PT: $x^2+\sqrt{x+1}=1$ (1)	3,0đ
Điều kiện: $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$	0,5đ
Đặt $\sqrt{x+1}=y$ $(y\geq 0)$	0,5đ
$\Rightarrow y^2=x+1 \Leftrightarrow x=y^2-1 \Leftrightarrow x^2=(y^2-1)^2$	0,5đ
PT (1) trở thành: $(y^2-1)^2+y-1=0 \Leftrightarrow y(y-1)(y^2+y-1)=0.$	0,5đ
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \\ y^2+y-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \\ y=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$	0,5đ
Thay trở lại cách đặt ta có: Tập nghiệm của PT là: $\left\{0;\ -1;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$	0,5đ
Bài 3: Giải PT $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$	4,0đ

Đặt $\sqrt[3]{x} = u,\ \sqrt[3]{2x-3} = v$	0,5đ
Khi đó: $u + v = \sqrt[3]{4(u^3 + v^3)}$	0,5đ
$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 4(u^3 + v^3)$	0,75đ
$\Leftrightarrow 3(u+v)(u^2 - 2uv + v^2) = 0$	0,5đ
$\Leftrightarrow 3(u+v)(u-v)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -v \\ u = v \end{array}\right.$	0,5đ
Với $u = v$ ta có: $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2x-3} \Leftrightarrow x = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 3$	0,5đ
Với $u = -v$ ta có: $\sqrt[3]{x} = -\sqrt[3]{2x-3} \Leftrightarrow x = -2x + 3 \Leftrightarrow x = 1$	0,5đ
Kết luận: PT có hai nghiệm $x = 1,\ x = 3$	0,25đ

3.2. Đề bài và đáp án kiểm tra trong chương 1

Bài 1: Giải PT $\sqrt{25 - x^2} = x - 1$

Lời giải:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 25 - x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 2x - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 4 \vee x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Bài 2: Giải PT $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} + 2 = x$

Lời giải:

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 9x + 1 = (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 3 \vee x = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Bài 3: Giải PT $2(x^2 - 2x) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 9 = 0$

Lời giải:

Điều kiện: $x^2 - 2x - 3 \geq\ 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x - 3},\ t \geq 0$

PT $\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x - 3) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 3 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x - 3},\ t \geq 0$

PT trở thành:

$$2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Với $t = 1$: $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$

Vậy PT có nghiệm là $x = 1 \pm \sqrt{5}$

4. Phụ lục 4: Hướng dẫn, đáp án bài tập mục 2.4

Dạng 1: Giải PT chứa căn thức bằng phương pháp lũy thừa

Bài 1. Giải PT: $\sqrt{x^2 - 2x - 4} = \sqrt{2 - x}$.

ĐS: $x = -2$

Bài 2. Giải PT: $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2$.

ĐS: $x = 3$

Bài 3. Giải PT: $\sqrt{x + 4} - \sqrt{1 - x} = \sqrt{1 - 2x}$.

ĐS: $x = 0$

Bài 4. Giải PT: $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$.

ĐS: $x=-1, x=-2$

Bài 5. Giải PT: $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

ĐS: $x=3$

Bài 6. Giải PT: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$.

ĐS: $x=5$

Bài 7. Giải PT: $\sqrt{11-x}-\sqrt{x-1}=2$.

ĐS: $x=2$

Bài 8. Giải PT: $\sqrt{3x^2-9x+1}=|x-2|$.

ĐS: $x=3, x=-\frac{1}{2}$

Bài 9. Giải PT: $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=3$.

ĐS: $x=-3, x=6$

Bài 10. Giải PT: $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+3}$.

ĐS: $x=-\frac{1}{2}$

Dạng 2: Dùng ẩn phụ chuyển PT chứa căn thức thành một PT với một ẩn phụ

Bài 11. Giải PT: $(x+1)(x+4)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$.

HD: $(x+1)(x+4)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+5x+2}=x^2+5x-2$

Đặt $t=\sqrt{x^2+5x+2},(t\geq 0)$. ĐS: $x=2, x=-7$

Bài 12. Giải PT: $\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}+\sqrt{(1+x)(8-x)}=3$.

HD: Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x},(t\geq 3)$

ĐS: $x=8, x=-1$

Bài 13. Giải PT: $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$.

HD: Đặt $t=\sqrt{x^2+11},(t\geq\sqrt{11})$

ĐS: $x = \pm 5$

Bài 14. Giải PT: $\left(x+5\right)\left(2-x\right)=3\sqrt{x^2+3x}$.

HD: $\left(x+5\right)\left(2-x\right)=3\sqrt{x^2+3x} \Leftrightarrow -x^2-3x+10=3\sqrt{x^2+3x}$

Đặt $t=\sqrt{x^2+3x}$,$(t \ge 0)$

ĐS: $x=1, x=-4$

Bài 15. Giải PT: $\sqrt{\left(x+1\right)\left(2-x\right)}=1+2x-2x^2$.

HD: $\sqrt{\left(x+1\right)\left(2-x\right)}=1+2x-2x^2 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+x+2}=1+2x-2x^2$

Đặt $t=\sqrt{-x^2+x+2},(t \ge 0)$

ĐS: $x=\dfrac{1}{2}, x=-4$

Bài 16. Giải PT: $\left(x-3\right)\left(x+1\right)+3\left(x-3\right)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=4$.

Điều kiện: $x \le 1 \vee x > 3$.

Đưa PT về PT $\left(x-3\right)\left(x+1\right)+3\sqrt{\left(x-3\right)\left(x+1\right)}=4$

Đặt $t=\sqrt{\left(x-3\right)\left(x+1\right)},(t \ge 0)$

ĐS: $x=1 \pm \sqrt{5}$

Bài 17. Giải PT: $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2}=x+\sqrt{x^2-16}-6$.

HD: Đặt $t=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4},(t \ge \sqrt{8})$

ĐS: $x=5$

Bài 18. Giải PT: $\left(x-3\right)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$.

HD: $\left(x-3\right)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7} \Leftrightarrow x^2-3x-13=\sqrt{x^2-3x+7}$

Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+7},(t \ge 0)$

ĐS: $x=6, x=-3$

Bài 19. Giải PT: $(x-1)(x+2)+2(x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=8$.

HD: Điều kiện: $x\le -2 \vee x>1$

$(x-1)(x+2)+2(x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=8$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)+2\sqrt{(x-1)(x+2)}=8$

Đặt $t=\sqrt{(x-1)(x+2)},(t\ge 0)$

ĐS: $x=-3, x=2$

Bài 20. Giải PT: $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$.

HD: Đặt $t=x+\sqrt{17-x^2}$

ĐS: $x=\pm 1, x=\pm 4$

Dạng 3: Dùng ẩn phụ chuyển PT chứa căn thức thành một hệ PT với hai ẩn phụ.

Bài 21. Giải PT: $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

HD: Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{3x^2-2x+15} \\ v=\sqrt{3x^2-2x+8} \end{cases},(u,v\ge 0)$

Ta có hệ PT $\begin{cases} u^2-v^2=7 \\ u+v=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=3 \end{cases}$

ĐS: $x=1,\ x=-\frac{1}{3}$

Bài 22. Giải PT: $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

HD: Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{3x^2+5x+8} \\ v=\sqrt{3x^2+5x+1} \end{cases},(u,v\ge 0)$

Ta có hệ PT $\begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 3 \end{cases}$

ĐS: $x = 1,\ x = -\dfrac{8}{3}$

Bài 23. Giải PT: $\sqrt{x^2 + 9} - \sqrt{x^2 - 7} = 2$.

HD: Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + 9} \\ v = \sqrt{x^2 - 7} \end{cases}, (u, v \geq 0)$

Ta có hệ PT $\begin{cases} u^2 - v^2 = 16 \\ u - v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 3 \end{cases}$

ĐS: $x = \pm 4$

Bài 24. Giải PT: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$.

HD: Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 - 3x + 3} \\ v = \sqrt{x^2 - 3x + 6} \end{cases}, (u, v \geq 0)$

Ta có hệ PT $\begin{cases} u^2 - v^2 = -3 \\ u - v = 3 \end{cases}$ hệ PT vô nghiệm

ĐS: PT vô nghiệm

Bài 25. Giải PT: $\sqrt{3 - x + x^2} - \sqrt{2 + x - x^2} = 1$.

HD: Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{3 - x + x^2} \\ v = \sqrt{2 + x - x^2} \end{cases}, (u, v \geq 0)$

Ta có hệ PT $\begin{cases} u^2 + v^2 = 5 \\ u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$

ĐS: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Dạng 4: Dùng ẩn phụ chuyển PT chứa căn thức thành một PT với một ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Bài 26. Giải PT: $\left(4x-1\right)\sqrt{x^2+1}=2\left(x^2+1\right)+2x-1$.

HD: Đặt $t=\sqrt{x^2+1},(t\ge 0)$.

$\left(4x-1\right)\sqrt{x^2+1}=2\left(x^2+1\right)+2x-1\Leftrightarrow 2t^2-\left(4x-1\right)t+2x-1=0$

$\Delta_t=16x^2-24x+9=\left(4x-3\right)^2$

ĐS: $x=\dfrac{4}{3}$

Bài 27. Giải PT: $x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}$.

HD: Đặt $t=\sqrt{x^2-2x},\ t\ge 0$.

$x^2-1=2x\sqrt{x^2-2x}\Leftrightarrow t^2-2xt+2x-1=0$

ĐS: $x=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

Bài 28. Giải PT: $\left(4x-1\right)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1$.

HD: Đặt $t=\sqrt{x^3+1},(t\ge 0)$.

$\left(4x-1\right)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1\Leftrightarrow 2t^2-\left(4x-1\right)t+2x+1=0$

ĐS: $x=2,x=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

Bài 29. Giải PT: $x^2+3x+1=\left(x+3\right)\sqrt{x^2+1}$.

HD: Đặt $t=\sqrt{x^2+1},(t\ge 1)$.

$x^2+3x+1=\left(x+3\right)\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow t^2-(x+3)t+3x=0$

ĐS: $x=\pm 2\sqrt{2}$