BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÂY BẮC

PHẠM HẢI SƠN

VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC PHÁT HIỆN VÀ GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ TRONG DẠY CHƯƠNG ‘‘TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT’’ LỚP 11 Ở TRƯỜNG THPT

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

SƠN LA, NĂM 2016

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÂY BẮC

PHẠM HẢI SƠN

VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC PHÁT HIỆN VÀ GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ TRONG DẠY CHƯƠNG ‘‘TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT’’ LỚP 11 Ở TRƯỜNG THPT

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

Chuyên ngành : LÝ LUẬN VÀ PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC BỘ MÔN TOÁN

Mã số: 60140111

Người hướng dẫn khoa học: TS. VŨ QUỐC KHÁNH

SƠN LA, NĂM 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng cá nhân tôi, các số liệu và kết quả nghiên cứu nêu trong luận văn là trung thực, chưa được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác. Tôi hoàn toàn chịu trách nhiệm trước nhà trường về sự cam đoan này.

Sơn La, tháng 11 năm 2016.

Tác giả

Phạm Hải Sơn

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng sau đại học, Ban chủ nhiệm khoa Toán – Lý – Tin trường Đại học Tây Bắc đã tạo điều kiện thuận lợi giúp tôi hoàn thành khóa học và hoàn thành việc nghiên cứu, hoàn thiện luận văn.

Đặc biệt tôi xin bầy tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Vũ Quốc Khánh, người đã trực tiếp hướng dẫn và tận tình chỉ bảo, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu, các thầy cô giáo và các em học sinh trường THPT Gia Phù – Phù Yên – Sơn La đã tạo điều kiện thuận lợi, giúp đỡ cho tôi trong quá trình học tập và viết luận văn. Xin cảm ơn gia đình, bạn bè và các đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Mặc dù bản thân đã rất cố gắng, song luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong được sự chỉ dẫn, đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo, các nhà khoa học và các bạn bè đồng nghiệp để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Sơn La, tháng 11 năm 2016

Tác giả

Phạm Hải Sơn

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

Từ và cụm từ viêt tắt	Từ và cụm từ đầy đủ
DH	Dạy học
GQVĐ	Giải quyết vấn đề
GV	Giáo viên
HS	Học sinh
PP	Phương pháp
PPDH	Phương pháp dạy học
QTDH	Qui trình dạy học
SGK	Sách giáo khoa
THPT	Trung học phổ thông
HĐ	Hành động
TH	Trường hợp

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Đảng và nhà nước ta luôn coi trọng việc phát triển con người, coi con người là nguồn lực hàng đầu của đất nước. Con người luôn được coi là nhân tố quan trọng nhất "*vừa là động lực, vừa là mục tiêu*'' cho sự phát triển bền vững của xã hội. Điều 35 của hiến pháp nước cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam đã chỉ rõ: "*Giáo dục - Đào tạo là quốc sách hàng đầu*''. Giáo dục là nền tảng của sự phát triển khoa học – công nghệ, phát triển nguồn nhân lực đáp ứng nhu cầu của xã hội hiện đại.

Về mục tiêu giáo dục phổ thông, chương 2, mục 2, điều 27.1 của Luật Giáo dục 2005 đã chỉ rõ: "*Giáo dục phổ thông là giúp học sinh phát triển toàn diện về đạo đức, trí tuệ, thể chất, thẩm mỹ và các kỹ năng cơ bản, phát triển năng lực cá nhân, tính năng động và sáng tạo, hình thành nhân cách con người Việt Nam xã hội chủ nghĩa, xây dựng tư cách và trách nhiệm công dân; chuẩn bị cho học sinh tiếp tục học lên hoặc đi vào cuộc sống lao động, tham gia xây dựng và bảo vệ Tổ quốc*''.

Cũng tại điều 28.1 mục trên Luật Giáo dục 2005 khẳng định: "*Nội dung giáo dục phổ thông phải bảo đảm tính phổ thông, cơ bản, toàn diện, hướng nghiệp và có hệ thống; gắn với thực tiễn cuộc sống, phù hợp với tâm sinh lý lứa tuổi của học sinh, đáp ứng mục tiêu giáo dục ở mỗi cấp học*'' và điều 28.2 viết: "*Phương pháp giáo dục phổ thông phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, sáng tạo của học sinh; phù hợp với đặc điểm của từng lớp học, môn học; bồi dưỡng phương pháp tự học, khả năng làm việc theo nhóm; rèn luyện kỹ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn; tác động đến tình cảm, đem lại niềm vui, hứng thú học tập cho HS*''.

Trong đổi mới toàn diện giáo dục, vấn đề đổi mới nội dung và PPDH rất được chú trọng. Đổi mới phương pháp dạy học là một nhiệm vụ quan trọng của ngành giáo dục nhằm nâng cao chất lượng giáo dục và đào tạo ra những con người phát triển toàn diện đáp ứng được sự nghiệp công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước. Nghị quyết Ban chấp hành TW Đảng lần thứ hai khóa VIII (1997) đã chỉ rõ: "cuộc cách mạng về phương pháp giáo dục phải hướng vào người học, rèn luyện và phát triển khả năng giải quyết vấn đề một cách năng động, độc lập sáng tạo ngay trong quá trình học tập ở nhà trường phổ thông. Áp dụng những phương pháp giáo dục hiện đại để bồi dưỡng cho học sinh năng lực tư duy sáng tạo, năng lực GQVĐ". Nghị quyết tỉnh Đảng bộ Sơn La về giáo dục, được đại hội đại biểu đảng bộ tỉnh lần thứ XIV thông qua ngày 24/09/2015 " Tiếp tục thực hiện tốt chủ trương lớn của Đảng về phát triển văn hóa, về đổi mới căn bản và toàn diện giáo dục và đào tạo, phát triển nguồn nhân lực, về khoa học và công nghệ"

Việc dạy và học ở các trường phổ thông hiện nay ở nước ta có chịu tác động của mục tiêu thi cử, do đó việc giảng dạy ở đây chủ yếu là truyền thụ các kiến thức, luyện các kỹ năng làm bài kiểm tra và bài thi mà ít để ý đến việc thông qua các kiến thức thức để dạy HS cách suy luận khoa học; rèn luyện tư duy độc lập, sáng tạo cho HS; ít khuyến khích các tìm tòi, phát hiện và giải quyết vấn đề. Nói chung việc giảng dạy hiện nay ở trường phổ thông là dạy kiến thức, mà ít chú ý đến việc dạy cho HS cách học, cách suy nghĩ, cách giải quyết các vấn đề một cách thông minh, độc lập sáng tạo.

Định hướng đổi mới phương pháp dạy học ở trường phổ thông trong giai đoạn hiện nay là làm thay đổi lối dạy truyền thụ một chiều sang dạy học theo "*phương pháp day học tích cực*" nhằm giúp HS phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động sáng tạo, rèn luyện thói quen và khả năng tự học, tinh thần hợp tác, kỹ năng vận dụng kiến thức vào các tình huống khác nhau trong học tập và trong thực tiễn; tạo niềm tin niềm vui hứng thú trong học tập. Làm cho "Học" là quá trình người học tìm tòi phát hiện và giải quyết vấn đề, luyện tập, khai thác và xử lí thông tin để kiến tạo tri thức và tự hình thành phẩm chất và năng lực cho bản thân.

Để đáp ứng được yêu cầu đổi mới phương pháp dạy học, trong những năm vừa qua có rất nhiều phương pháp dạy học được nghiên cứu và vận dụng vào thực tiễn dạy học trong trường phổ thông nước ta, trong đó có phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề. Nhiều nghiên cứu đã chỉ ra rằng, phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề là phương pháp dạy học phát huy tích tích cực, chủ động, sáng tạo của HS. HS được đặt vào các tình huống có vấn đề từ đó gợi nhu cầu tìm giải pháp để giải quyết vấn đề đó, thông qua các hoạt động học tập, dưới sự hướng dẫn, dẫn dắt của GV người học tự mình phát hiện ra các tình huống có vấn đề, bước đầu dần tự lực tìm giải pháp giải quyết các vấn đề mình chưa rõ chứ không phải thụ động tiếp thu những tri thức đã được GV sắp đặt. Trong quá trình trên, GV có vai trò định hướng tạo ra những tình huống có vấn đề, để HS phát hiện và giải quyết vấn đề tìm ra tri thức.

Bên cạnh việc đổi mới phương pháp dạy học việc đổi mới nội dung chương trình sách giáo khoa là một hướng để nâng cao chất lượng dạy học trong trường phổ thông. Một trong những tư tưởng quan trọng của chương trình môn toán bậc THPT là tăng cường mạch toán ứng dụng và những ứng dụng của toán học để giúp HS thấy được ý nghĩa của toán học cũng như để tạo những hứng thú đối với họ. Một trong các nội dung toán ứng dụng được đưa vào chương trình toán ở trường phổ thông là nội dung "Tổ hợp và xác suất".

Thực tế dạy học cho thấy các bài toán tổ hợp và xác suất luôn là một dạng toán khó đối với HS. Nhiều HS không thể phân biệt được các khái niệm, không biết khi nào dùng các quy tắc cộng, quy tắc nhân hay các khái niệm chỉnh hợp, tổ hợp để giải quyết các bài toán. Bên cạnh đó, xác suất là nội dung kiến thức mới được đưa vào chương trình, nội dung này có liên quan mật thiết với các bài toán tổ hợp, đồng thời nó lại phản ánh các tình huống thực tiễn nên việc chuyển các bài toán thực tiễn thành các bài toán toán học là công việc vô cùng khó khăn đối với HS. Do vậy khi dạy học phần này GV cần trang bị cho HS kiến thức một cách có hệ thống, đồng thời GV cần thiết kế được các hoạt động học tập để thu hút HS vào việc tham gia phát hiện và giải quyết các vấn đề trong các hoạt động đó để từ đó họ có thể nắm bắt được các tri thức một cách chắc chắn, có hệ thống đồng thời họ hình thành và rèn luyện những kĩ năng cần thiết cho bản thân.

Ở góc độ tìm hiểu thực tiễn, thực trạng dạy học môn Toán ở các trường trường THPT tỉnh Sơn La những năm qua cho thấy: Tất cả các trường THPT của tỉnh đã và đang thực hiện đổi mới phương pháp dạy học. Nhà trường, trong đó có đội ngũ cán bộ quản lý, GV và HS cố gắng và bước đầu đã tìm cách thay đổi cả về nhận thức, cả về cải tiến dạy học, cách học, thay đổi cả về cách soạn giáo án, cách kiểm tra đánh giá ... Tuy nhiên, việc đổi mới phương pháp dạy học đó chưa thực sự có hiệu quả đối với mọi đối tượng HS. Một mặt bởi lối dạy học truyền thống đã tồn tại trong nhà trường nhiều năm, việc soạn giảng theo định hướng đổi mới đòi hỏi sự đầu tư về mặt thời gian, năng lực sư phạm và sự tâm huyết yêu nghề của GV. Mặt khác nhiều HS mức độ nhận thức còn hạn chế. Sự khác biết về nhận thức của các em trong cùng một lớp thường có sự phân hóa lớn. Do đó không dễ dàng vận dụng PPDH tích cực phù hợp với tất cả HS trong một sớm một chiều được.

Ở trường THPT Gia Phù với đặc thù có đến 90% HS là con em các dân tộc thiểu số, cư trú phân tán ở những vùng điều kiện kinh tế khó khăn. Đây cũng là một yếu tố có ảnh hưởng ít nhiều đến khả năng tiếp thu kiến thức, và mức độ nhận thức của các em, đặc biệt là trong tiếp thu kiến thức với nhiều nội dung và khái niệm mới của chương “Tổ hợp và xác suất”

Trên cơ sở lí luận và thực tiễn đã nêu, tôi chọn đề tài là: "Vận dụng phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề trong dạy chương "Tổ hợp và xác suất" lớp 11 ở trường THPT"

2. Mục đích nghiên cứu

Đề xuất biện pháp vận dụng PPDH phát hiện và GQVĐ trong dạy học chương "Tổ hợp và xác suất" ở lớp 11

3. Đối tượng nghiên cứu và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Quá trình dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề vận dụng trong dạy học chương "Tổ hợp và xác suất" ở THPT.

Phạm vi nghiên cứu: Vận dụng phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề trong dạy chương "Tổ hợp và xác suất" cho HS lớp 11 trường THPT Gia Phù - Phù Yên - Sơn la năm học 2016 – 2017

4. Nhiệm vụ nghiên cứu

- Nghiên cứu luận về DH phát hiện và GQVĐ

- PPDH phát hiện và giải quyết vấn đề

- Nghiên cứu biện pháp vận dụng PPDH phát hiện và GQVĐ trong dạy học "Tổ hợp và xác suất" lớp 11.

- Nghiên cứu nội dung chương "Tổ hợp và xác suất" lớp 11 ban cơ bản, cần vận dụng PPDH phát hiện và GQVĐ (dạy học khái niệm, định lí, quy tắc phương pháp, giải bài tập).

- Thiết kế một số bài giảng và tổ chức thực nghiệm sư phạm nhằm kiểm tra tính khả thi của biện pháp đề xuất trong đề tài.

5. Giả thuyết khoa học

Nếu vận dụng có hiệu quả PPDH phát hiện và GQVĐ chương "Tổ hợp và xác suất" thì sẽ góp phần nâng cao chất lượng dạy và học lớp 11.

6. Phương pháp nghiên cứu

a. PP Nghiên cứu lý luận

- Nghiên cứu tài liệu về DH phát hiện và GQVĐ.

- Nghiên cứu nội dung PPDH phát hiện và GQVĐ (cơ sở triết học, cơ sở tâm lý học, cơ sở giáo dục học; thành tố cơ bản của PPDH phát hiện và GQVĐ).

- Nghiên cứu việc vận dụng PPDH phát hiện và GQVĐ.

- Tìm hiểu tài liệu về vận dụng PPDH phát hiện và GQVĐ

- Phân tích SGK Đại số 11 (ban cơ bản) chương "Tổ hợp và xác suất"

b. PP Quan sát - điều tra

- Tìm hiểu thực tế DH chương "Tổ hợp và xác suất" lớp 11 ban cơ bản ở trường phổ thông.

- Rút ra một số nhận định khách quan về PPDH phát hiện và GQVĐ mà GV toán THPT đang sử dụng.

c. PP Thực nghiệm sư phạm

Tổ chức tiến hành thử nghiệm nhằm xem xét, kiểm nghiệm tính khả thi, ý nghĩa thực tiễn của đề tài

7. Cấu trúc của luận văn

Luận văn bao gồm: Lời cảm ơn, phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, phụ lục và nội dung của luận văn gồm ba chương:

Chương 1. Cơ sở lý luận và thực tiễn

Chương 2. Vận dung phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề vào dạy học nội dung chương Tổ hợp và xác suất

Chương 3. Thực nghiệm sư phạm

Chương 1: CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN

1.1. Dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề

1.1.1. Khái niệm về dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề

*** Vài nét về lịch sử của dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề**

Dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề là PPDH trong đó GV tạo ra những tình huống có vấn đề, điều khiển HS phát hiện vấn đề, hoạt động tự giác, tích cực, chủ động, sáng tạo để giải quyết vấn đề và thông qua đó chiếm lĩnh tri thức, rèn luyện kĩ năng và đạt được những mục đích học tập khác. Đặc trưng cơ bản của dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề là "tình huống gợi vấn đề" vì "Tư duy chỉ bắt đầu khi xuất hiện tình huống có vấn đề" (Rubinstein).

Năng lực phát hiện vấn đề trong môn toán là năng lực hoạt động trí tuệ của HS khi đứng trước những vấn đề, những bài toán cụ thể, có mục tiêu và tính hướng đích cao đòi hỏi phải huy động khả năng tư duy tích cực và sáng tạo nhằm tìm ra lời giải cho vấn đề.

Một số biện pháp tăng khả năng phát hiện vấn đề cho HS:

- Sử dụng đặc biệt hóa, khái quát hóa và tương tự hóa.
- Sáng tác bài toán.
- Chuyển đổi bài toán.

Năng lực giải quyết vấn đề là tổ hợp các năng lực thể hiện ở các kĩ năng (thao tác tư duy và hoạt động) trong hoạt động học tập nhằm giải quyết có hiệu quả những nhiệm vụ của bài toán.

Một số biện pháp tăng khả năng giải quyết vấn đề cho HS:

- Khai thác triệt để giả thiết của bài toán để tìm lời giải
- Tìm nhiều lời giải cho bài toán
- Tìm sai lầm của một lời giải

Theo I.IA Lecne: thuật ngữ “dạy học nêu vấn đề” ra đời chưa được lâu, việc nghiên cứu tư tưởng dạy học nêu vấn đề bắt đầu chưa lâu lắm nhưng các tư tưởng đó, dưới các tên gọi khác nhau, đã tồn tại trong giáo dục hàng trăm năm nay rồi. Các hiện tượng “nêu vấn đề” đã được Xôcrat (469 – 399, trước công nguyên) thực hiện trong các cuộc đàm thoại. Trong khi tranh luận, ông không bao giờ kết luận trước mà để mọi người tự tìm ra cách giải quyết. Trên thế giới, các nhà khoa học cũng quan tâm nhiều đến phương pháp dạy học này và áp dụng ở nhiều môn học, lứa tuổi khác nhau ở bậc phổ thông vào những năm 60, 70 của thế kỷ 20. Vào thời kỳ này, ở Việt Nam, phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề có tác dụng lớn trong quá trình đổi mới phương pháp dạy học ở phổ thông, đáng kể đến là công trình nghiên cứu của Nguyễn Bá Kim, Nguyễn Hữu Châu...

Phương pháp giải quyết vấn đề (problem solving) đã phải trải qua nhiều thử thách, thực nghiệm trong gần suốt một thế kỷ 20 để đến gần đây mới được sử dụng thực sự ở nhiều trường học ở Phần Lan, Mĩ..., và trở thành một yếu tố chủ đạo trong cải cách giáo dục ở một số nước khác. Đó là một phương pháp dạy và học mới phù hợp với triết lý về khoa học và giáo dục hiện đại, đáp ứng tốt những yêu cầu về giáo dục trong thế kỷ 21. Vì vậy, phát hiện và giải quyết vấn đề là một mục đích của quá trình dạy học trong nhà trường, cụ thể là năng lực giải quyết vấn đề để thích ứng với sự phát triển của xã hội. Nghị quyết ban chấp hành TW Đảng lần thứ hai khóa VIII (1997) đã chỉ rõ “cuộc cách mạng về phương pháp giáo dục phải hướng vào người học, rèn luyện và phát triển khả năng giải quyết vấn đề một cách năng động, độc lập, sáng tạo ngay trong quá trính học tập ở nhà trường phổ thông. Áp dụng những phương pháp giáo dục hiện đại để bồi dưỡng cho học sinh năng lực tư duy sáng tạo, năng lực giải quyết vấn đề”.

Như vậy, phát hiện và GQVĐ không chỉ thuộc phạm trù PPDH, mà còn trở thành một mục đích của quá trình dạy học ở trường, được cụ thể hoá thành một thành tố của mục tiêu là năng lực GQVĐ, giúp con người thích ứng được với sự phát triển của xã hội, "giải quyết vấn đề" cũng trở thành nội dung học tập của HS. Những điều trình bày trên nhằm nhấn mạnh đến năng lực GQVĐ, phù hợp với xu thế hiện đại về cải cách PPDH của thế giới.

Tóm lại:

- Phát hiện và GQVĐ là một phương pháp DH có hiệu quả và được coi như là một trong những hướng ưu tiên trong định hướng về đổi mới PPDH.

- Năng lực phát hiện và GQVĐ là một trong những năng lực then chốt, cần thiết cho mọi HS, đó là mục tiêu của quá trình dạy học.

*** Những cơ sở khoa học của dạy học phát hiện giải quyết vấn đề**

Theo Nguyễn Bá Kim [6], PPDH phát hiện và GQVĐ dựa trên các cơ sở sau:

- *Cơ sở triết học*: "Mâu thuẫn là động lực của sự phát triển", nên mâu thuẫn giữa yêu cầu nhận thức và những tri thức, kĩ năng còn hạn chế là động lực thúc đẩy nhận thức ở HS.

- *Cơ sở tâm lí học*: "Con người chỉ bắt đầu tư duy tích cực khi nảy sinh nhu cầu tư duy". Khi có nhu cầu hiểu biết, có niềm say mê, hứng thú thì quá trình nhận thức có hiệu quả sẽ tăng lên rõ rệt.

- *Cơ sở giáo dục học*: Dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề phù hợp với nguyên tắc, tính tự giác và tích cực, nó khêu gợi được hoạt động học tập mà chủ thể được hướng đích, gợi động cơ trong quá trình phát hiện và giải quyết vấn đề. Hiệu quả giáo dục sẽ cao hơn khi quá trình đào tạo được biến thành quá trình tự đào tạo.

*** Những khái niệm cơ bản**

a) Vấn đề

Được biểu thị bởi một hệ thống những mệnh đề, câu hỏi, yêu cầu hoạt động chưa được giải đáp, chưa có phương pháp có tính thuật giải để giải và thực hiện.

b) Tình huống gợi vấn đề

Là tình huống trong đó *tồn tại một vấn đề*, *gợi nhu cầu nhận thức*, *gây niềm tin ở khả năng.*

Ví dụ: Tính số cách lập danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong số 11 cầu thủ để đá 5 quả luân lưu 11 mét là tình huống gợi vấn đề đối với HS khi chưa biết công thức số chỉnh hợp.

c) Dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề

Theo Nguyễn Bá Kim - Vũ Dương Thụy [7], dạy học phát hiện và GQVĐ được hiểu là sự tổ chức quá trình dạy học bao gồm việc tạo ra tình huống gợi vấn đề trong giờ học, kích thích ở HS nhu cầu GQVĐ nảy sinh, lôi cuốn các em vào hoạt động nhận thức tự lực nhằm nắm vững kiến thức, kỹ năng, kỹ xảo mới, phát triển tính tích cực của trí tuệ và hình thành cho các em năng lực tự mình thông hiểu và lĩnh hội thông tin khoa học mới.

Theo Ôkôn [16], quá trình dạy học của GV gồm các hành động sau:

Bước 1: Tổ chức các tình huống có vấn đề, phát hiện vấn đề và đặt vấn đề để GQVĐ.

Bước 2: Giúp đỡ HS những điều cần thiết để GQVĐ.

Bước 3: Kiểm tra cách giải quyết đó và nghiên cứu lời giải để hệ thống hoá, củng cố những kiến thức đã tiếp thu được.

Các hành động học tập cơ bản của HS là:

Bước 1: Phát hiện vấn đề nảy sinh trong tình huống có vấn đề.

Bước 2: Độc lập GQVĐ dưới sự điều khiển của GV.

Mục đích cuối cùng là HS nắm vững được tri thức và học được cách thức "tự khám phá" tri thức.

d) Đặc trưng của dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề

Theo Nguyễn Bá Kim [6], dạy học phát hiện và GQVĐ có đặc trưng cơ bản sau:

+ HS được đặt vào tình huống gợi vấn đề.

+ HS hoạt động tích cực, huy động hết tri thức và khả năng của mình để GQVĐ.

+ Giúp HS không những phát huy kỹ năng lĩnh hội được kết quả của quá trình GQVĐ mà còn ở chỗ HS còn được học bản thân việc học.

*** Các hình thức của dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề**

Theo Nguyễn Bá Kim [6], các hình thức của dạy học phát hiện và GQVĐ gồm có

a) Tự nghiên cứu vấn đề

GV tạo ra tình huống gợi vấn đề, HS tự phát hiện và GQVĐ.

b) Vấn đáp phát hiện và giải quyết vấn đề

Trong vấn đáp phát hiện và GQVĐ, HS làm việc không hoàn toàn độc lập mà có sự gợi ý, dẫn dắt của GV khi cần thiết. Phương tiện để thực hiện hình thức này là những câu hỏi của thầy và những câu trả lời hoặc hành động đáp lại của trò.

c) Thuyết trình phát hiện và giải quyết vấn đề

GV tạo ra tình huống gợi vấn đề sau đó chính GV phát hiện vấn đề và trình bày quá trình suy nghĩ GQVĐ.

d) Các mức độ và các kiểu phương pháp dạy học giải quyết vấn đề

Quá trình DH phát hiện và GQVĐ có thể được phân biệt theo bốn mức độ và có thể thực hiện ba kiểu phương pháp sau:

- Các mức độ (4 mức độ)

+ Mức độ thứ nhất: GV nêu vấn đề và GQVĐ còn HS chú ý học cách nêu vấn đề và GQVĐ do GV làm mẫu.

+ Mức độ thứ hai: GV nêu vấn đề rồi tổ chức, lãnh đạo HS tham gia giải quyết một trong những vấn đề đó.

+ Mức độ thứ ba: GV nêu vấn đề rồi tổ chức, lãnh đạo HS độc lập giải quyết toàn bộ vần đề.

+ Mức độ thứ tư: HS tự nêu vấn đề và độc lập giải quyết toàn bộ vấn đề.

- Các kiểu phương pháp

Quá trình DH phát hiện và GQVĐ có thể được thực hiện với các kiểu phương pháp khác nhau trong sự phối hợp một cách hợp lý.

+ Kiểu phương pháp thông báo vấn đề.

+ Kiểu phương pháp tìm kiếm bộ phận.

+ Kiểu phương pháp nghiên cứu toàn bộ vấn đề.

1.1.2. Thực hiện dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề

*** Quy trình dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề.**

Dựa vào các nguyên tắc của việc thiết lập một QTDH, đồng thời tham khảo Polya [3], Nguyễn Bá Kim- Vũ Dương Thụy [7], có thể đưa ra quy trình cho DH phát hiện và GQVĐ là:

1) *Phát hiện vấn đề*

+ Đặt HS vào tình huống gợi vấn đề.

+ Phân tích tình huống đó.

2) *GQVĐ*

+ Phân tích mối liên hệ giữa các dữ kiện, điều kiện và vấn đề cần tìm.

+ Đề xuất, lựa chọn hướng giải quyết và tìm tòi lời giải

+ Thực hiện lời giải.

3) *Nghiên cứu sâu giải pháp*

+ Kiểm tra tính hợp lí và tính tối ưu của lời giải.

+ Phát biểu chính xác vấn đề (là kiến thức cần lĩnh hội).

+ Xét khả năng ứng dụng của nó và xếp vào hệ thống tri thức đã có.

+ Vận dụng vào tình huống mới.

Hạt nhân của quá trình điều khiển sự nghiên cứu của HS là GV phải tạo được tình huống gợi vấn đề, trong đó ở mỗi giai đoạn, hành động của thầy và trò diễn ra như thế nào, tùy thuộc vào hình thức DH nào mà thầy lựa chọn, các câu hỏi đưa ra như thế nào để tạo được tình huống có vấn đề, những biện pháp tìm tòi nào được sử dụng, phụ thuộc vào cấu trúc lôgíc của vấn đề cần nghiên cứu. Do đó GV khi vận dụng QTDH trên để định hướng cách thức hành động trên lớp cần lưu ý những điểm sau:

- QTDH trên phải được xây dựng trên cơ sở bao quát toàn bộ các đơn vị kiến thức quy định trong một giờ học (tức là GV phải xác định rõ vấn đề nhận thức nào là cơ bản, cho HS phát hiện và giải quyết, những vấn đề còn lại coi là những sự vận dụng của vấn đề cơ bản đó).

- Bước vận dụng vào tình huống mới (trong giai đoạn thứ ba của QTDH) lại phải trải qua ba giai đoạn của một QTDH – phát hiện tình huống mới, giải quyết nó và lại phải vận dụng vào tình huống mới khác,…cứ như thế tiếp tục cho đến hết giờ học. Do đó hành động vận dụng ở QTDH phải thực hiện đồng thời hai mục đích: vừa tìm ra kiến thức mới, vừa rèn luyện phương thức hành động qua việc thực hành lại qui trình GQVĐ.

- QTDH đã nêu chỉ được coi là qui trình "khung" cho một giờ dạy theo kiểu GQVĐ. Còn trong mỗi giai đoạn hoạt động, tương tác giữa GV và HS phải được biến đổi một cách linh hoạt: tùy thuộc vào nội dung cần lĩnh hội, hình thức DH được lựa chọn, trình độ nhận thức của HS, năng lực chuyên môn của GV...

- Không nên quá cứng nhắc trong việc xây dựng và sử dụng QTDH, bởi việc thiết kế nó ngoài việc phụ thuộc vào các yếu tố kể trên còn phụ thuộc vào cả phương tiện DH nữa.

*** Những cách thông dụng để tạo tình huống gợi vấn đề:**

a) Dự đoán nhờ nhận xét trực quan và thực nghiệm (tính toán, đo đạc...)

Ví dụ:

$$\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\left(a+b\right)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Các hệ số trong khai triển $\left(a+b\right)^2$ theo thứ tự từ trái qua phải là

$1 = C_2^0;\ 2 = C_2^1;\ 1 = C_2^2$ tức là $\left(a+b\right)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2$.

Các hệ số trong khai triển $\left(a+b\right)^3$ theo thứ tự từ trái qua phải là $1 = C_3^0$;

$3 = C_3^1;\ 3 = C_3^2;\ 1 = C_3^3$ tức là $\left(a+b\right)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3$.

Gợi ra vấn đề:

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_n^ka^{n-k}b^k + ... + C_n^nb^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k.$$

b) Lật ngược vấn đề

Ví dụ: Nếu áp dụng công thức nhị thức Newton thì tìm được hệ số của x^3 trong khai triển $\left(3x-4\right)^5$ là $10.3^3.(-4)^2 = 4320$. Vậy nếu biết hệ số của x^3 trong khi triển $\left(3x-4\right)^n$ là 4320 thì có n bằng bao nhiêu?

c) Xem xét tương tự

Ví dụ: Từ quy tắc cộng dẫn tới quy tắc cộng xác suất.

d) Khái quát hoá

Ví dụ: Từ công thức $P(AB) = P(A)P(B)$ khái quát hoá được công thức

$P(A_1A_1 \cdots A_k) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)$

e) Giải bài tập mà người học chưa biết thuật giải

Ví dụ: Giải bài toán: Có 30 nam và 15 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm 6 người sao cho có đúng 2 nữ.

g) Phát hiện nguyên nhân sai lầm và sửa chữa sai lầm

Ví dụ: Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 người lên 2 xe.

HS có những lời giải như sau:

Lời giải thứ nhất: Mỗi cách sắp xếp tương ứng với cách chọn 1 xe cho 3 người, nên ta có C_3^1 cách.

Lời giải thứ hai: Bài toán tương đương với bài toán đã cho là sắp xếp 2 xe cho 3 người, nên có A_3^2 cách.

Lời giải thứ ba: Có 2 khả năng, một là cả 3 người lên cùng 1 xe (khả năng này có 2 cách chọn xe), hai là một người lên xe này và hai người còn lại lên xe kia (khả năng này có 6 cách chọn). Vậy có tất cả 8 cách.

Nhận xét: Trong ba lời giải trên thì hai lời giải đầu đều sai, vì cách chọn xe cho 3 người khác với cách sắp xếp 3 người lên 2 xe. Lời giải thứ 3 đúng.

1.1.3. Vận dụng dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề trong môn Toán

Việc vận dụng DH phát hiện và GQVĐ trong môn Toán, theo Phạm Văn Hoàn, Trần Thúc Trình, Nguyễn Gia Cốc [4], có nghĩa là phải tổ chức việc DH Toán sao cho các em luôn đứng trước những tình huống có vấn đề mang tính chất Toán học phải giải quyết, phải luôn luôn tìm tòi, phát hiện ra vấn đề và sáng tạo những con đường để giải quyết những vấn đề đó (tự rút ra công thức, tự chứng minh định lý, tìm cách ghi nhớ một cách tích cực cần kiến thức cần lĩnh hội, tự tìm ra thuật Toán giải bài Toán điển hình …). Kết quả là HS lĩnh hội được kiến thức, kỹ năng, kỹ xảo mới đồng thời học cách tự khám phá.

Khi vận dụng DH phát hiện và GQVĐ trong môn Toán cần phải chú ý khai thác sử dụng những khía cạnh sau đây:

- Khi DH khái niệm cần vận dụng linh hoạt hai con đường: con đường qui nạp và con đường suy diễn.

- Khi DH định lý cần chú ý hai con đường suy diễn và suy đoán.

- Khi DH giải bài tập Toán cần chú ý đến cả hai mặt suy diễn và suy lý.

Nói cách khác khi DH cần chú ý thực hiện cả hai mặt: Dạy chứng minh và dạy tìm tòi. Đồng thời cần chú ý rèn luyện cho HS các hoạt động trí tuệ chung như: Tương tự hoá, đặc biệt hoá, khái quát hoá, tổng quát hoá...

1.2. Tình hình dạy học chương tổ hợp và xác suất – Đại số 11

1.2.1. Nội dung và mục đích dạy học chương tổ hợp và xác suất

a) Nội dung:

Nội dung của chương gồm 2 phần được thực hiện trong 17 tiết, phân phối dự kiến như sau:

Phần A: Tổ hợp (8 tiết)

§1. Quy tắc đếm.	1 tiết
§2. Hoán vị - chỉnh hợp - tổ hợp	5 tiết
§3. Nhị thức Niu-tơn	2 tiết

Phần B: Xác suất (11 tiết)

§4. Phép thử và biến cố	3 tiết
§5. Xác suất của biến cố	4 tiết
Ôn tập và kiểm tra chương II	2 tiết

b) Mục đích và yêu cầu

§1. Quy tắc đếm:

- Về kiến thức:

+ Biết được quy tắc cộng và quy tắc nhân.

- Về kĩ năng:

+ Bước đầu vận dụng được quy tắc cộng và quy tắc nhân.

+ Biết phối hợp hai quy tắc này trong việc giải các bài toán đếm đơn giản.

§2. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp:

- Về kiến thức:

+ Biết được khái niệm hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

+ Nhớ được các công thức tính số hoán vị, số chỉnh hợp, số tổ hợp.

- Về kĩ năng:

+ Tính được số hoán vị, số chỉnh hợp, số tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử.

+ Biết được khi nào dùng tổ hợp, khi nào dùng chỉnh hợp trong các bài toán đếm.

+ Biết phối hợp sử dụng các kiến thức về hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp để giải các bài toán đếm tương đối đơn giản.

§3. Nhị thức Niu-tơn

- Về kiến thức:

+ Biết được công thức nhị thức Niu-tơn.

+ Nắm được quy luật truy hồi, thiết lập hàng thứ n+1 của tam giác pa-xcan khi đã biết hàng thứ n. Thấy mối quan hệ giữa các hệ số trong công thức nhị thức Niu-tơn với các số nằm trên một hàng của tam giác pa-xcan.

- Về kĩ năng:

+ Biết khai triển nhị thức Niu – tơn với một số mũ cụ thể

+ Tìm được hệ số của x^k trong khai triển nhị thức Niu – tơn thành đa thức.

§4. Phép thử và biến cố.

- Về kiến thức:

+ Biết được: Phép thử ngẫu nhiên ; Không gian mẫu ; Biến cố liên quan đến phép thử ngẫu nhiên.

+ Biết được các khái niệm: Biến cố hợp ; Biến cố xung khắc ; Biến cố đối ; Biến cố giao ; Biến cố độc lập ;

- Về kĩ năng:

+ Xác định được: Phép thử ngẫu nhiên ; Không gian mẫu ; Biến cố liên quan đến phép thử ngẫu nhiên.

§5. Xác suất của biến cố.

- Về kiến thức:

+ Biết được định nghĩa cổ điển xác suất của biến cố.

+ Biết được tính chất $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega)=1$; $0 \le P(A) \le 1$

+ Biết (Không chứng minh) định lí cộng xác suất và định lí nhân xác suất.

- Về kĩ năng:

+ Biết vận dụng quy tắc cộng xác suất, quy tắc nhân xác suất trong bài tập đơn giản.

+ Biết sử dụng máy tính bỏ túi hỗ trợ tính xác suất.

1.2.2. Những thuận lợi và khó khăn khi dạy học chương tổ hợp và xác suất

- Những thuận lợi:

+ Các kiến thức của chương rất cơ bản, các bài toán gắn liền với thực tiễn và thiết thực nên thường gây được sự hứng thú trong học tập cho HS. Hơn nữa, thông qua thực tiễn hoặc bằng kinh nghiệm tích luỹ từ thực tiễn, HS có thể tìm ra lời giải cho các bài toán, nếu GV biết cách tổ chức hoạt động nhận thức định hướng suy nghĩ cho HS thì việc dạy học chương này trở nên dễ dàng hơn.

+ Cách trình bày, diễn đạt kiến thức mới của SGK là tương đối dễ hiểu, sinh động, gần với thực tiễn và phù hợp với nhận thức của đa số HS.

+ Hệ thống các bài tập trong SGK vừa phải và được chọn lọc cẩn thận đóng vai trò quan trọng để củng cố lý thuyết.

- Những khó khăn:

+ Tổ hợp và xác suất là một trong những nội dung khó đối với HS, HS thường gặp khó khăn và sai lầm khi giải toán.

+ Kiến thức phần tổ hợp liên quan mật thiết đến phần xác suất do đó nếu HS không nắm vững phần tổ hợp thì sẽ ảnh hưởng không tốt đến việc học phần xác suất.

+ Phần xác suất là nội dung mới được đưa vào nội dung SGK nên GV chưa có hoặc có rất ít kinh nghiệm giảng dạy phần này.

1.3. Kết luận chương 1

Chương này trình bày một số vấn đề cơ bản làm cơ sở thực tiễn của vấn đề được nghiên cứu bao gồm: Định hướng đổi mới phương pháp dạy học, dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề (khái niệm, cách thực hiện, vận dụng,...), sau đó trình bày nội dung chương Tổ hợp và xác suất, những thuận lợi và khó khăn khi dạy học chương này.

Chương 2. VẬN DỤNG PHƯƠNG PHÁP DẠY HỌC PHÁT HIỆN VÀ GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ VÀO DẠY HỌC NỘI DUNG CHƯƠNG TỔ HỢP VÀ XÁC XUẤT

2.1. Vận dụng dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề vào dạy học các khái niệm

Vị trí của khái niệm và yêu cầu của khái niệm

Theo Nguyễn Bá Kim [6], việc dạy học các khái niệm toán học ở trường trung học phổ thông phải làm cho học sinh dần dần đạt được các yêu cầu sau:

- Nắm vững các đặc điểm đặc trưng cho một khái niệm.
- Biết nhận dạng khái niệm.
- Biết phát biểu rõ ràng chính xác định nghĩa của một số khái niệm.
- Biết vận dụng các khái niệm trong những tình huống cụ thể trong hoạt động giải toán và ứng dụng vào thực tiễn.
- Biết phân loại khái niệm và nắm được mối quan hệ của một khái niệm với những khái niệm khác trong một hệ thống khái niệm.

Các yêu cầu có quan hệ chặt chẽ với nhau. Song vì lí do sư phạm, các yêu cầu trên không phải lúc nào cũng được đặt ra ở mức độ như nhau đối với từng khái niệm.

Những con đường tiếp cận khái niệm: Trong dạy học người ta phân biệt ba con đường tiếp cận khái niệm: Con đường suy diễn, con đường qui nạp, con đường kiến thiết.

a) Con đường quy nạp

Theo con đường này, xuất phát từ một số trường hợp cụ thể (như mô hình, hình vẽ, thí dụ cụ thể,...) giáo viên dẫn dắt học sinh bằng cách trừu tượng hóa và khái quát hóa tìm ra dấu hiệu đặc trưng của một khái niệm thể hiện ở những trường hợp cụ thể, từ đó đi đến định nghĩa của khái niệm.

Cần phải chọn lọc một số lượng thích hợp những hình ảnh, thí dụ cụ thể, trong đó dấu hiệu đặc trưng cho khái niệm được đọng lại nguyên vẹn, còn những thuộc tính khác của những đối tượng thì thay đổi.

- Quá trình tiếp cận một khái niệm theo con đường này thường diễn ra như sau:

+ GV đưa ra một số ví dụ cụ thể để học sinh thấy sự tồn tại của một loạt đối tượng nào đó

+ GV dẫn dẫn học sinh phân tích, so sánh và nêu bật những đặc điểm chung của các đối tượng đang được xem xét.

+ GV gợi mở để học sinh phát biểu định nghĩa khái niệm bằng cách nêu các tính chất đặc trưng của khái niệm

- Con đường này nên thực hiện khi:

+ Trình độ nhận thức học sinh còn thấp.

+ Vốn kiến thức còn chưa nhiều và thường được sử dụng trong điều kiện: Chưa phát hiện được một khái niệm nào làm điểm xuất phát cho con đường suy diễn.

+ Đã định hình được một số đối tượng thuộc ngoại diên của khái niệm cần hình thành, do đó đủ vật liệu để thực hiện phép quy nạp.

- Quá trình hình thành khái niệm theo con đường quy nạp có tác dụng phát triển những năng lực trí tuệ như trừu tượng hóa, khái quá hóa, so sánh thuận lợi cho hoạt động tích cực của học sinh. Tuy nhiên, con đường này đòi hỏi phải tốn nhiều thời gian và cần có các điều kiện đã nói trên.

b) Con đường suy diễn

Con đường thứ hai là con đường suy diễn, trong đó định nghĩa khái niệm mới xuất phát từ định nghĩa của khái niệm mà học sinh đã biết.

- Quá trình tiếp cận một khái niệm theo con đường này thường diễn ra như sau:

+ Xuất phát từ một khái niệm đã biết, thêm vào nội hàm của khái niệm đó một số đặc điểm mà ta quan tâm.

+ Phát biểu định nghĩa bằng cách nêu tên khái niệm mới và định nghĩa nó nhờ một khái niệm tổng quát hơn cùng với những đặc điểm hạn chế một bộ phận trong khái niệm tổng quát đó.

+ Đưa ra ví dụ đơn giản minh họa cho khái niệm vừa được định nghĩa.

- Con đường này nên thực hiện khi:

+ Trình độ nhận thức của học sinh đã khá hơn

+ Vốn kiến thức đã nhiều lên

+ Phát hiện ra một khái niệm làm điểm xuất phát cho con đường suy diễn

- Sau khi định nghĩa theo con đường này, cần thiết phải lấy ví dụ cụ thể để chứng tỏ rằng khái niệm được định nghĩa như vậy thực sự tồn tại.

- Con đường hình thành khái niệm này có tác dụng tốt để phát huy tính chủ động và sáng tạo cho học sinh, tiết kiệm thời gian. Tuy nhiên con đường này hạn chế phát triển năng lực trí tuệ chung như phân tích, tổng hợp, so sánh...

c) Con đường kiến thiết

- Con đường tiếp cận một khái niệm theo con đường kiến thiết thường diễn ra như sau:

+ *Xây dựng một hay nhiều* đối tượng đại diện cho khái niệm cần được hình thành hướng vào những yêu cầu tổng quát nhất định xuất phát từ nội bộ Toán học hay từ thực tiễn.

+ *Khái quát hóa quá trình xây* dựng những đối tượng đại diện, đi tới đặc điểm đặc trưng cho khái niệm cần hình thành.

+ Phát biểu định nghĩa được gợi ý do kết quả bước hai.

Con đường này mang cả những yếu tố quy nạp lẫn suy diễn. Yếu tố suy diễn thể hiện ở chỗ xuất phát từ những yêu cầu tổng quát để xây dựng một hay nhiều đối tượng đại diện cho khái niệm cần hình thành. Yếu tố quy nạp thể hiện ở chỗ khái quát hóa quy trình xây dựng những đối tượng đại diện riêng lẻ đi đến đặc điểm tổng quát đặc trưng cho khái niệm cần định nghĩa.

Sau đây chúng tôi minh họa thông qua thông qua một số ví dụ:

2.1.1. Khái niệm hoán vị

Định nghĩa: Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.

<table>
<tr><th>Lý luận PH GQVĐ</th><th>Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể</th></tr>
<tr><td>Phát hiện và thâm nhập vấn đề</td><td>Câu hỏi 1: Ba vận động viên A, B, C chạy thi. Nếu không kể trường hợp có hai vận động viên về đích cùng một lúc thì các khả năng nào có thể xảy ra? Hãy điền các kết quả vào bảng sau:
<table>
<tr><td>Giải</td><td colspan="6">Các kết quả có thể</td></tr>
<tr><td>Nhất</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Nhì</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ba</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
HS: (điền các kết quả vào bảng)
<table>
<tr><td>Giải</td><td colspan="6">Các kết quả có thể</td></tr>
<tr><td>Nhất</td><td>A</td><td>A</td><td>B</td><td>B</td><td>C</td><td>C</td></tr>
<tr><td>Nhì</td><td>B</td><td>C</td><td>A</td><td>C</td><td>A</td><td>B</td></tr>
<tr><td>Ba</td><td>C</td><td>B</td><td>C</td><td>A</td><td>B</td><td>A</td></tr>
</table>
Câu hỏi 2: Cho hai viên bi Vàng, Đỏ vào hai hộp 1 và 2. Hỏi có những khả năng nào có thể xảy ra? Hãy điền các kết quả vào bảng</td></tr>
</table>

sau:

Hộp 1	Hộp 2

HS: (điền các kết quả vào bảng)

Hộp 1	Hộp 2
Vàng	Đỏ
Đỏ	Vàng

GV: Trong câu hỏi 1, các em có nhận xét gì về mỗi kết quả của cuộc chạy thi?

HS: (Câu trả lời mong muốn). Là danh sách ba vận động viên sắp xếp theo một thứ tự nào đó.

GV: Trong câu hỏi 2, Các em có nhận xét gì về mỗi kết quả của việc cho hai viện bi Vàng, Đỏ vào hai hộp?

HS: (Câu trả lời mong muốn). Là danh sách hai viên bi sắp xếp theo một thứ tự nào đó.

GV: Như vậy trong câu hỏi 1, nếu thầy gọi $T = \{A;B;C\}$ thì mỗi kết quả của việc chạy thi tương ứng là một kết quả của việc sắp xếp thứ tự ba phần tử của tập hợp T, mỗi cách sắp xếp thứ tự này được gọi là một hoán vị của ba phần tử A, B, C.

HS: Phát hiện ở đây có một tập hợp có ba phần tử, mỗi kết quả của việc sắp sếp thứ tự ba phần tử thì được gọi là một hoán vị của ba phần tử đó.

GV: Trong câu hỏi 2, nếu thầy gọi tập hợp các viên bi A = {Vàng;

	Đỏ} thì mỗi kết quả của việc cho hai viên bi vào hai hộp tương ứng là một kết quả của việc sắp xếp thứ tự hai phần tử của tập hợp A, mỗi cách sắp xếp thứ tự này được gọi là một hoán vị của hai phần tử Vàng, Đỏ. HS: Phát hiện ở đây có một tập hợp có hai phần tử, mỗi kết quả của việc sắp sếp thứ tự hai phần tử thì được gọi là một hoán vị của hai phần tử đó. Vậy vấn đề đặt ra là: Nếu thầy cho tập hợp A có n phần tử $(n \geq 1)$. Tương tự như định nghĩa trong các ví dụ trên. Các em hiểu thế nào là một hoán vị của n phần tử của tập hợp A? HS: Phát hiện ở đây có một tập hợp có n phần tử, và vấn đề ở đây là cần phải định nghĩa khái niệm thế nào là một hoán vị của n phần tử đó.
Tìm giải pháp	GV: Cách để lập lên một hoán vị của ba phần tử? HS: Sắp xếp ba phần tử đó theo một thứ tự. GV: Cách để lập lên một hoán vị của hai phần tử? HS: Sắp xếp hai phần tử đó theo một thứ tự. GV: Vậy tương tự như trên. Nếu thầy cho tập hợp A có n phần tử $(n \geq 1)$ thì khi sắp xếp n phần tử đó theo một thứ tự thì ta được cái gì? HS: Phát hiện nếu tương tự như các trường hợp trên thì khi sắp xếp n phần tử theo một thứ tự thì ta sẽ được một hoán vị của n phần tử đó. Từ đây HS phát biểu định nghĩa khái niệm hoán vị của n phần tử.
Trình bầy	HS: Phát biểu theo ý hiểu của mình về định nghĩa khái niệm hoán vị của n phần tử.

giải pháp	GV: Một cách tổng quát ta có: Cho tập A có n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó.
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Cho tập hợp $A = \{1,\ 2,\ 3\}$. Hãy liệt kê các hoán vị của các phần tử của tập hợp A? HS: Liệt kê các hoán vị của các phần tử của tập hợp A. 123, 132, 213, 231, 312, 321 GV: Có bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau được lập từ các số của tập hợp A? HS: Phát hiện thấy mỗi hoán vị của ba phần tử của tập hợp A thì tương ứng với một số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán. Từ đó HS đưa ra câu trả lời: Có 6 số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau được lập từ các chữ số của tập hợp A. GV: 111, 122 có phải là những hoán vị của các phần tử của tập hợp A hay không? HS: 111, 122 không phải là những hoán vị của các phần tử của tập hợp A. GV: Cho tập hợp $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$. Yêu cầu mỗi học sinh viết hai hoán vị của các phần tử của tập hợp A, và mời 4 học sinh lên bảng viết HS: Lên bảng thực hiện yêu cầu. GV: Trên bảng có các hoán vị nào giống nhau hay không, có thể lập nên hoán vị nào khác? HS:... GV: Như vậy hai hoán vị của n phần tử khác nhau ở điều gì? HS: Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp các

	phần tử đó.

2.1.2. Khái niệm chỉnh hợp

Định nghĩa: Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

<table>
<tr><th>Lý luận PH GQVĐ</th><th>Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể</th></tr>
<tr><td>Phát hiện và thâm nhập vấn đề</td><td>Câu hỏi 1: Lớp học có ba em HS ưu tú A, B, C. Hãy nêu các cách chọn 2 em làm cán bộ lớp, một em làm lớp trưởng và một em làm lớp phó? Hãy điền kết quả vào bảng sau:
<table>
<tr><th>Lớp trưởng</th><th>Lớp phó</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>
HS: (điền các kết quả vào bảng)
<table>
<tr><th>Lớp trưởng</th><th>Lớp phó</th></tr>
<tr><td>A
A
B
B</td><td>B
C
A
C</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

	C C	A B	

Câu hỏi 2: Có bốn chữ số 1, 2, 3, 4. Hãy viết tất cả các số có ba chữ số khác nhau được lập từ bốn chữ số trên?

HS: 123, 231, 412, 314, …..

GV: Trong câu hỏi 1, có nhận xét gì về mỗi kết quả phân công ?

HS: (Câu trả lời mong đợi). Mỗi kết quả của việc phân công tương ứng với một bộ sắp thứ tự của hai trong ba bạn.

GV: Trong câu hỏi 2, có nhận xét gì về mỗi chữ số gồm ba chữ số khác nhau được lập từ bốn chữ số trên?

HS: (Câu trả lời mong đợi) Mỗi chữ số lập được tương ứng với một bố sắp thứ tự ba số trong bốn số đã cho.

GV: Như vậy trong câu hỏi 1, nếu thầy gọi $T = \{A, B, C\}$ thì mỗi cách phân công sẽ tương ứng với kết quả của việc lấy ra hai phần tử trong ba phần tử của tập hợp T rồi sắp xếp hai phần tử đó theo một thứ tự, (*(thứ 1, thứ 2)* ứng với *thứ 1* là lớp trưởng, *thứ 2* là lớp phó). Mỗi kết quả của việc sắp xếp thứ tự này được gọi là một chỉnh hợp chập hai của ba phần tử.

HS: Phát hiện ở đây có một tập hợp có ba phần tử, mỗi kết quả của việc lấy ra hai trong ba phần tử của tập hợp rồi sắp sếp chúng theo một thứ tự thì ta được một chỉnh hợp chập hai của ba phần tử đó.

GV: Trong câu hỏi 2, nếu thầy gọi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ thì mỗi số tự nhiên lập được tương ứng là kết quả của việc lấy ra ba phần tử trong bốn phần tử của tập hợp A rồi sắp xếp chúng theo một thứ tự. Mỗi kết quả sắp xếp thứ tự này được gọi là một chỉnh hợp chập ba của tập hợp gồm bốn phần tử.

	HS: Phát hiện ở đây có một tập hợp có bốn phần tử, mỗi kết quả của việc lấy ra ba trong bốn phần tử của tập hợp rồi sắp sếp chúng theo một thứ tự thì ta được một chỉnh hợp chập ba của bốn phần tử đó. Vậy vấn đề được đặt ra là: Nếu cho tập hợp A có n phần tử thì các em hiểu thế nào là một chỉnh hợp chập k của n phần tử $(1 \le k \le n)$? HS: Phát hiện ở đây có một tập hợp có n phần tử, và vấn đề ở đây là cần phải định nghĩa khái niệm thế nào là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đó.
Tìm giải pháp	GV: Cách tạo ra một chỉnh hợp chập hai của ba phần tử? HS: Lấy hai phần tử khác nhau và sắp xếp chúng theo một thứ tự. GV: Cách tạo ra một chỉnh hợp chập ba của tập bốn phần tử? HS: Lấy ba phần tử khác nhau trong bốn phần tử đó và sắp xếp chúng theo một thứ tự. GV: Vậy tương tự như trên, nếu thầy cho tập hợp A có n phần tử $(n \ge 1)$, thì khi ta lấy ra k phần tử khác nhau của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự thì ta được cái gì? HS: Tư duy tương tự hóa biết rằng nếu lấy k phần tử khác nhau của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự thì ta sẽ được một chỉnh hợp chập k của tập hợp gồm n phần tử. Từ đó HS phát biểu định nghĩa chỉnh hợp chập k của tập hợp gồm n phần tử theo ý hiểu của mình.
Trình bầy giải	HS: Phát biểu theo ý hiểu khái niệm chỉnh hợp chập k của tập hợp gồm n phần tử. GV: Một cách tổng quát ta có: Cho tập hợp A gồm n phần tử

pháp	$(n \geq 1)$. Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Cho tập hợp A={1, 2, 3}. Hãy liệt kê tất cả các chỉnh hợp chập 2 và các chỉnh hợp chập 3 của các phần tử của tập hợp A? HS. Các chỉnh hợp chập 2 là: 12, 13, 21, 23, 31, 32 Các chỉnh hợp chập 3 là: 123, 132, 213, 231, 312, 321 GV: Có nhận xét gì về các chỉnh hợp chập ba của ba phần tử trên? HS: Các chỉnh hợp chập ba của ba phần tử chính là các hoán vị của ba phần tử. GV: Tổng quát ta có, chỉnh hợp chập n của n phần tử thì chính là hoán vị của n phần tử đó. GV: Hai chỉnh hợp khác nhau tức là như thế nào? HS: Khác nhau ở các phần tử được lấy ra hoặc khác nhau ở thứ tự sắp xếp các phần tử. GV: Ở đây cần lưu ý hai điều: k phần tử khác nhau của tập A và sắp xếp theo một thứ tự.

2.1.3. Khái niệm tổ hợp

Định nghĩa: Giả sử tập hợp A có n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của tập hợp A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và	Câu hỏi 1: Có 4 em tổ trưởng A, B, C, D. Cần chọn ra hai em đi trực đội cờ đỏ, thì các khả năng nào có thể xảy ra?

thâm nhập vấn đề	HS: Các khả năng có thể xảy ra: Hai em được chọn là A, B *hoặc* A, C *hoặc* A, D *hoặc* B, C *hoặc* B, D *hoặc* C, D. Câu hỏi 2: Đội văn nghệ lớp gồm bốn HS A, B, C, D. Cần chọn ra ba em để lập một đội tam ca đi thi ca nhạc. Thì các khả năng nào có thể xảy ra? HS: Các khả năng có thể xảy ra: Ba em được chọn là A, B, C *hoặc* A, B, D *hoặc* A, C, D *hoặc* B, C, D GV: Trong câu hỏi 1, có nhận xét gì về mỗi kết quả lựa chọn? HS: (Câu trả lời mong đợi). Mỗi kết quả lựa chọn tương ứng chọn hai em trong bốn em mà không phân biệt thứ tự. GV: Trong câu hỏi 2, có nhận xét gì về mỗi kết quả lựa chọn? HS: (Câu trả lời mong đợi). Mỗi kết quả lựa chọn tương ứng chọn ba em trong bốn em mà không phân biệt thứ tự. GV: Trong các câu hỏi trên thì các em được chọn ra thực hiện cùng một nhiệm vụ, công việc..., do đó không cần quan tâm đến thứ tự trong trong các em đó. Trong câu hỏi 1, nếu thầy coi $T = \{A, B, C, D\}$ thì mỗi cách chọn sẽ tương ứng với một tập con gồm hai phần tử của tập hợp T. Và mỗi tập con đó được gọi là một tổ hợp chập hai của bốn phần tử đã cho. HS: Phát hiện ở đây có một tập hợp có bốn phần tử, mỗi một tập con gồm hai phần tử của tập hợp đó thì được gọi là một tổ hợp chập hai của bốn phần tử. GV: Trong câu hỏi 2, nếu thầy coi $T = \{A, B, C, D\}$ thì mỗi cách chọn sẽ tương ứng với một tập hợp con gồm ba phần tử của tập hợp T. Và mỗi tập con đó được gọi là một tổ hợp chập ba của bốn

	phần tử đã cho. HS: Phát hiện ở đây có một tập hợp có bốn phần tử, mỗi một tập con gồm ba phần tử của tập hợp đó thì được gọi là một tổ hợp chập ba của bốn phần tử. Vậy vấn đề đặt ra là: Nếu thầy cho tập hợp A có n phần tử $(n \geq 1)$ thì tổ hợp chập k của n phần tử là gì ? $(1 \leq k \leq n)$ HS: Phát hiện ở đây có một tập hợp có n phần tử, và vấn đề ở đây là cần phải định nghĩa khái niệm thế nào là một tổ hợp chập k của n phần tử đó.
Tìm giải pháp	GV: Cách tạo ra một tổ hợp chập hai của của một tập hợp gồm bốn phần tử? HS: Lấy ra một tập con gồm hai phần tử trong bốn phần tử của tập hợp đó. GV: Cách tạo ra một tổ hợp chập ba của một tập hợp gồm bốn phần tử? HS: Lấy ra một tập con gồm ba phần tử trong bốn phần tử của tập hợp đó. GV: Vậy tương tự như trên, khi ta lấy ra một tập con gồm k phần tử của tập hợp A gồm n phần tử thì ta được cái gì? HS: Hiểu được việc lấy ra một tập con gồm k phần tử của tập hợp A gồm n phần tử thì sẽ được một tổ hợp chập k của n phần tử đó. Từ đây HS khái quát đưa ra định nghĩa tổ hợp chập k của một tập hợp gồm n phần tử.
Trình bầy giải	HS: Phát biểu theo ý hiểu định nghĩa tổ hợp chập k của n phần tử. GV: Một cách tổng quát ta có: Cho tập A có n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k

pháp	của n phần tử đã cho. Chú ý: Ta quy ước gọi tổ hợp chập 0 của n phần tử là tập rỗng.
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hãy liệt kê các tổ hợp chập 3, chập 4 của 5 phần tử của tập hợp A? HS: Các tổ hợp chập 3: $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 2, 4\}$; $\{1, 2, 5\}$; $\{1, 3, 4\}$; $\{1, 3, 5\}$; $\{1, 4, 5\}$;... Các tổ hợp chập 4: $\{1, 2, 3, 4\}$; $\{1, 2, 3, 5\}$; $\{1, 2, 4, 5\}$; $\{1, 3, 4, 5\}$; $\{2, 3, 4, 5\}$ GV: Hãy so sánh hai tổ hợp $\{1, 2, 3, 4\}$ và $\{1, 4, 3, 2\}$? HS: Hai tổ hợp này như nhau vì đều là tập con gồm bốn phần tử 1, 2, 3, 4 của tập hợp A (hay có thể giải thích là do hai tập hợp $\{1, 2, 3, 4\}$ và $\{1, 4, 3, 2\}$ là hai tập hợp bằng nhau) GV: Hai tổ hợp chập k của cùng n phần tử khác nhau tức là như thế nào? HS: k phần tử của tổ hợp này khác k phần tử của tổ hợp kia (hay trong tổ hợp này có ít nhất một phần tử không nằm trong tổ hợp kia)

2.2. Vận dụng PPDH phát hiện và GQVĐ vào dạy học định lý và tính chất

Vị trí của định lý và yêu cầu dạy học định lý

Theo Nguyễn Bá Kim [6], dạy học các định lý toán học nhằm đạt được các yêu cầu sau đây:

- HS nắm được hệ thống định lý và những mối liên hệ giữa chúng, từ đó có khả năng vận dụng chúng vào hoạt động giải toán cũng như giải quyết các vấn đề trong thực tiễn.

- HS thấy được sự cần thiết phải chứng minh định lý, thấy được việc chứng minh định lý là một yếu tố quan trọng trong phương pháp làm việc trên lĩnh vực toán học.

- Học sinh hình thành và phát triển năng lực chứng minh toán học, từ chỗ hiểu chứng minh, trình bày lại được chứng minh, nâng lên mức độ biết cách suy nghĩ để tìm ra chứng minh, theo yêu cầu của chương trình môn Toán phổ thông.

Dạy học định lý toán học có thể thực hiện theo hai con đường: Con đường có khâu suy đoán và con đường suy diễn.

Con đường có khâu suy đoán, bao gồm: Tạo động cơ; phát hiện định lí; phát biểu định lý; chứng minh định lý; vận dụng định lý

Con đường suy diễn, bao gồm: Tạo động cơ; suy luận logic dẫn tới định lý; phát biểu định lý; củng cố định lý

Việc dạy học một định lí cụ thể theo con đường nào phụ thuộc vào nội dung định lý và điều kiện cụ thể của HS. Ban đầu, ở mức độ thấp, dạy học định lý cho HS nên theo con đường có khâu suy đoán. Về sau, ở trình độ cao hơn, có thể dạy định lý theo con đường suy diễn.

Sau đây chúng tôi minh họa việc dạy học một số định lý.

2.2.1. Định lý số hoán vị

Định lý phát biểu như sau: Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là: $P_n = n! = n(n-1)(n-2)...1$.

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm	GV: Trong ví dụ trước ta đã biết các bộ sắp thứ tự abc, acb,... là những hoán vị của các phần tử của tập hợp {a, b, c}. Nếu các phần tử a, b, c là một trong các chữ số tự nhiên từ 1 đến 9 thì mỗi bộ

nhập vấn đề	này tương ứng cho ta một số tự nhiên có 3 chữ số $\overline{abc}$, và ngược lại. Vậy số các số tự nhiên có 3 chữ số lập từ các chữ số a, b, c, sẽ tương ứng với số các hoán vị của các phần tử của tập hợp {a, b, c}. Do đó vấn đề đặt ra là, trong trường hợp tổng quát chúng ta cần tìm được số các hoán vị của n phần tử, để dễ dàng giải quyết các loại bài tập dạng này. HS: Phát hiện ra vấn đề là muốn biết có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số từ các chữ số a, b, c thì ta chỉ cần đi xác định được số hoán vị của ba phần tử a, b, c. Và vấn đề tổng quát là nhu cầu đi tìm công thức tính số hoán vị của tập n phần tử GV: Như vậy bài toán đặt ra là: Nếu tập hợp A có n phần tử thì có tất cả bao nhiêu hoán vị của n phần tử đó? Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử. Ta sẽ đi tìm công thức của P_n.
Tìm giải pháp	GV: Nhắc lại khái niệm hoán vị của n phần tử? HS: Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tử đó GV: Cách lập ra một hoán vị của n phần tử của tập hợp A ta làm như thế nào? HS: Sắp xếp n phần tử của A theo một thứ tự ta được một hoán vị của n phần tử của A. GV: Vậy để tính số hoán vị của A ta cần làm gì? HS: Ta cần phải tính số cách sắp xếp n phần tử theo thứ tự. GV: Muốn tính số cách sắp xếp n phần tử của tập hợp A theo một thứ tự thì ta cần thiết lập ra một quy trình để sắp xếp n phần tử đó theo một thứ tự, và dựa vào quy trình đó để tính ra số hoán vị. Vậy

	quy trình đó được hoàn thành bởi những hành động nào? HS: Phát hiện công việc sắp xếp n phần tử của tập hợp A theo một thứ tự sẽ được hoàn thành bởi n hành động liên tiếp. Hành động 1 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ nhất, hành động 2 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ 2, hành động 3 là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ 3,… hành động n là chọn phần tử để xếp vào vị trí thứ n. GV: Ở Hành động 1 sẽ có bao nhiêu cách thực hiện? Ở Hành động 2 có bao nhiêu cách thực hiện? Tiếp tục như vậy ở hành động 3 ta có bao nhiêu cách,.. đến hành động n ta có bao nhiêu cách? HS: Phát hiện ra số cách thực hiện trong mỗi hành động, và biết vận dụng quy tắc nhân để tính ra số cách để hoàn thành công việc. Từ đó HS đưa ra kết quả số hoán vị của n phần tử.
Trình bầy giải pháp	HS: Công việc lập được một hoán vị của n phần tử ta tiến hành liên tiếp các hành động sau: HĐ 1. Chọn 1 phần tử cho vị trí thứ nhất, có n cách HĐ2: Chọn 1 phần tử trong số các phần tử còn lại cho vị trí thứ 2, có (n – 1) cách ... HĐ n: Chọn phần tử còn lại sau cùng xếp vào vị trí thứ n, có 1 cách Vậy theo quy tắc nhân ta có số cách hoàn thành công việc là: $n(n-1)(n-2)\ldots 1$ GV: Vậy số hoán vị của n phần tử sẽ là: $P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$ Ta có định lý sau:

	Cho tập hợp A có n phần tử $(n \geq 1)$ thì số các hoán vị của n phần tử của tập hợp A sẽ là: $P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$
Nghiên cứu sâu giải pháp	Bài toán 1: Trong giờ học môn Giáo dục Quốc phòng, một tiểu đội HS gồm mười người được xếp thành một hàng dọc. Hỏi có bao nhiêu cách xếp? GV: Một cách xếp được đặc chưng bởi điều gì? HS: Được đặc trưng bởi thứ tự của mười em HS. Tức là một bộ sắp thứ tự của mười em HS cho ta một cách sắp xếp và ngược lại GV: Vậy số cách sắp xếp được xác định như thế nào? HS: Được tính bằng số cách lập bộ sắp xếp thứ tự của mười em HS. Mỗi bộ sắp xếp thứ tự này tương ứng với một hoán vị của tập hợp gồm mười phần tử và ngược lại. Do đó có $10! = 3628800$ Bài toán 2: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, lập các số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu số? GV: Tương tự như cách lập luận trong bài toán 1. Hãy nêu cách giải bài toán? HS: Mỗi một cách lập số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau từ sáu chữ số trên cho ta một hoán vị của các phần tử của tập hợp {1, 2, 3, 4, 5, 6} và ngược lại. Vậy số cách lập chính là số hoán vị của các phần tử của tập hợp gồm sáu phần tử và có $6! = 720$ (số) GV: Có thể giải bài toán bằng cách vận dụng quy tắc nhân hay không? HS: Việc lập một số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 là một công việc gồm 6 hành động liên tiếp. HĐ 1: Chọn một chữ số làm số hàng đơn vị. Có 6 cách chọn HĐ 2: Chọn một chữ số trong số 5 chữ số còn lại làm số hàng

	chục. Có 5 cách chọn HĐ 3: Chọn một chữ số trong 4 chữ số còn lại làm số hàng trăm. Có 4 cách chọn HĐ 4: Chọn một chữ số trong 3 chữ số còn lại làm số hàng nghìn. Có 3 cách chọn HĐ 5: Chọn một chữ số trong 2 chữ số còn lại làm số hàng chục nghìn. Có 2 cách chọn HĐ 6: Chọn số cuối cùng còn lại làm số hàng trăm nghìn. Có 1 cách chọn. Vậy có 6.5.4.3.2.1 = 720 số.

2.2.2. Định lý số chỉnh hợp

Định lý phát biểu như sau: Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1 \le k \le n)$ là: $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	Đặt vấn đề: Từ bài toán thực tế: tính số cách lập danh sách đá 5 quả 11 mét. Bài toán 1: Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11m. Huấn luyện viên của mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong số 11 cầu thủ để đá 5 quả luân lưu. Hãy tính xem huấn luyện viên của mỗi đội có bao nhiêu cách lập danh sách 5 cầu thủ. GV: Tương tự phần chứng minh định lý số hoán vị, muốn tìm số cách lập một danh sách ta cần dựa vào quy trình để lập ra được một danh sách 5 cầu thử đá 11m. Vậy quy trình trên bao gồm mấy

<table>
<tr><td></td><td>hành động và mỗi hành động có mấy lựa chọn?
HS: Ta tiến hành liên tiếp 5 hành động:
Hành động 1: Chọn một cầu thủ đá quả thứ nhất có 11 cách chọn
Hành động 2: Chọn một cầu thủ đá quả thứ hai có 10 cách chọn
Hành động 3: Chọn một cầu thủ đá quả thứ ba có 9 cách
Hành động 4: Chọn một cầu thủ đá quả thứ bốn có 8 cách chọn
Hành động 5: Chọn một cầu thủ đá quả thứ năm có 7 cách chọn
$\Rightarrow$ Theo quy tắc nhân, huấn luyện viên của mỗi đội sẽ có $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55440$ cách lập danh sách.
GV: Trong bài toán trên nếu thầy coi tập hợp A là tập hợp gồm 11 cầu thủ để chọn đá luân lưu thì mỗi một danh sách đá luân lưu sẽ tương ứng với một chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử của tập hợp A và ngược lại. Vậy số cách lập danh sách chính bằng số chỉnh hợp chập 5 của tập hợp gồm 11 phần tử.
Vậy vấn đề đặt ra: Cho một tập hợp có n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chỉnh hợp chập k của tập hợp đó?
Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là A_n^k.
HS: Phát hiện vấn đề là cần phải tìm ra công thức xác định số chỉnh hợp chập k của n phần tử để ứng dụng trong các bài toán đếm như trên.</td></tr>
<tr><td>Tìm giải pháp</td><td>GV: Tương tự như bài toán trên. Muốn tìm số cách lập một chỉnh hợp chập k của n phần tử ta cần dựa vào quy trình để lập ra được một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Vậy quy trình trên bao gồm mấy hành động?
HS: Gồm k Hành động thực hiện liên tiếp:
Hành động 1: Chọn một phần tử đặt vào vị trí thứ 1</td></tr>
</table>

	Hành động 2: Chọn một phần tử đặt vào vị trí thứ 2 .... Hành động k: Chọn một phần tử đặt vào vị trí thứ k GV: Hãy xét xem ở mỗi hành động có bao nhiêu cách chọn? Từ đó xác định xem có bao nhiêu chỉnh hợp chập k của n phần tử?
Trình bầy giải pháp	HS: Ở hành động 1 có n cách chọn, ở hành động 2 sẽ có $(n-1)$ cách chọn, hành động 3 có $(n-2)$ cách chọn,... đến hành động k sẽ có $(n-k+1)$ cách chọn. Theo quy tắc nhân ta có: $n(n-1)...(n-k+1)$ cách lập ra một chỉnh hợp chập k của n phần tử. Vậy số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử $(1 \le k \le n)$ là: $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$
Nghiên cứu sâu giải pháp	Bài toán 2: Có bảy bông hoa màu khác nhau và ba lọ khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba lọ đã cho (mỗi lọ cắm một bông)? GV: Tương tự như các ví dụ trên, để tính số cách cắm hoa thỏa mãn yêu câu ta cần thiết lập một quy trình lập ra một cách cắm hoa. Để lập ra một cách cắm hoa thoả mãn yêu cầu cần làm các hành động nào? HS: Ta phải thực hiện liên tiếp ba hành động: Hành động 1: Chọn một bông hoa để cắm vào lọ thứ nhất. Có 7 cách chọn Hành động 2: chọn một bông hoa trong số 6 bông hoa còn lại để cắm vào lọ thứ hai. Có 6 cách chọn Hành động 3: Chọn một bông hoa tong số 5 bông hoa còn lại để cắm vào lọ thứ ba. Có 5 cách chọn

	$\Rightarrow$ có $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ cách thực hiện GV: Một hướng nghĩ khác đó là dựa vào khái niệm chỉnh hợp. Coi tập hợp A là tập hợp gồm 7 bông hoa nói trên. Thì có nhận xét gì về mỗi chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử của tập A và mỗi cách cắm hoa? HS: Mỗi chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử của tập A thì tương ứng với một cách cắm hoa và ngược lại. GV: Vậy số cách cắm hoa có thể tính như thế nào? HS: Một chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử của tập hợp A cho ta tương ứng một cách cắm hoa và ngược lại. Vậy số cách cắm hoa thoả mãn đề bài chính là số chỉnh hợp chập 3 của 7 phần tử. Vậy có $A_7^3 = 210$ cách cắm hoa.

2.2.3. Định lý số tổ hợp

Định lý phát biểu như sau: Số các tổ hợp chập k của n phần tử $(1 \le k \le n)$ là:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	Đặt vấn đề: Trong các bài toán: Có bao nhiêu cách chọn 2 em trong số 4 em HS tổ trưởng để đi trực đội cờ đỏ; bài toán có bao nhiêu cách lập đội tam ca từ 4 HS trong đội văn nghệ của lớp;..., đều yêu cầu chúng ta tính được số tổ hợp chập k của n phần tử, do đó ta cần tìm một công thức để tính số tổ hợp? HS: Phát hiện vấn đề là để giải quyết các bài toán đếm như trên thì

	nhu cầu cần thiết là ta cần đi xác định được số tổ hợp chập k của n phần tử tương ứng. Do vậy vấn đề là phải xác định được công thức tính số tổ hợp chập k của tập n phần tử.
Tìm giải pháp	GV: Một em hãy nhắc lại khái niệm tổ hợp và cách lập ra một tổ hợp. HS: (Khái niệm...) GV: Bây giờ chúng ta cần tính số tổ hợp chập k của n phần tử tức là cần tìm được một công thức. Trước phần này ta đã biết được hai công thức về số hoán vị và số chỉnh hợp. Có một cách để đi tìm công thức về số tổ hợp là tìm được sự liên quan đến các công thức đã biết trên. GV: Xét tập hợp A có n phần tử. Có nhận xét gì về việc lập một tổ hợp chập k của n phần tử và việc lập một chỉnh hợp chập k phần tử? HS: Lập một tổ hợp là lấy ra một bộ k phần tử của A mà không quan tâm đến thứ tự. Lập một chỉnh hợp là lấy ra một bộ k phần tử của A và sắp theo một thứ tự. GV: Nếu k phần tử lấy ra ở trên là trùng nhau. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_k$ thì lập được bao nhiêu tổ hợp? Bao nhiêu chỉnh hợp từ k phần tử này? HS: Một tổ hợp và k! chỉnh hợp từ k phần tử trên. GV: Vậy với một bộ k phần tử của tập A ta lập được một tổ hợp và k! chỉnh hợp từ bộ này. Điều đó có nghĩa với các phần tử của một tổ hợp chập k sẽ lập được bao nhiêu chỉnh hợp tương ứng? HS: Lập được k! chỉnh hợp từ các phần tử của một tổ hợp. GV: Như vậy một tổ hợp chập k sẽ tạo ra tương ứng được k! chỉnh hợp. Vậy nếu biết số tổ hợp chập k của n phần tử là x thì có tính

	được số chỉnh hợp chập k không của n phần tử hay không? HS: Nếu biết số tổ hợp là x thì số chỉnh hợp sẽ là x.k! GV: Nếu ký hiệu số tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k thì C_n^k được xác định như thế nào?
Trình bầy giải pháp	HS: Một tổ hợp chập k của n phần tử sẽ tạo ra tương ứng được k! chỉnh hợp chập k của n phần tử đó. Vậy ta có $A_n^k = k!\cdot C_n^k \Leftrightarrow C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$ GV: Đây chính là công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử. Như vậy chúng ta đã tìm được công thức tính số tổ hợp và cách chứng minh nó. $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}.\quad (1 \le k \le n)$
Nghiên cứu sâu giải pháp	Bài toán: Có 16 đội bóng đá tham gia thi đấu. Hỏi cần phải tổ chức bao nhiêu trận đấu sao cho hai đội bóng bất kỳ đều gặp nhau đúng một lần? GV: Một cách để tính số trận đấu phải tổ chức là thiết lập quy trình lập được một trận đấu thoả mãn đề bài. Quy trình này như thế nào? HS: Chọn ra hai đội bóng trong số 16 đội bóng (không phân biệt thứ tự hai đội bóng được chọn) GV: Số cách chọn ra 2 đội bóng trong 16 đội bóng mà không phân biệt thứ tự giữa hai đội được chọn ? Từ đó suy ra số trận đấu cần phải tổ chức? HS: Mỗi cách chọn ra hai đội bóng trong số 16 đội bóng mà không phân biệt thứ tự giữa hai đội được chọn thì tương ứng với một tổ hợp chập 2 của 16 phần tử và ngược lại. $\Rightarrow$ số cách chọn là

	$C_{16}^{2} = 120$ cách. Vậy số trận đấu phải tổ chức là 120 trận. GV: Nếu coi việc lập một trận đấu là một công việc được hoàn thành bởi liên tiếp hai hành động: Hành động 1: Chọn đội thứ nhất. Có 16 cách chọn. Hành động 2: Chọn đội thứ 2 trong 15 đội còn lại. Có 15 cách chọn $\Rightarrow$ theo quy tắc nhân ta sẽ có $16 \cdot 15 = 240$ cách lập một trận đấu $\Rightarrow$ phải tổ chức 240 trận đấu. Vậy sai lầm ở đâu? HS: … GV: Ta phải chú ý, với yêu cầu của đề bài thì hai đội bóng bất kỳ chỉ gặp nhau đúng một lần nên việc lập một cặp đấu thì thứ tự của hai đội là không quan trọng. Nếu theo suy luận như trên, thì đã xét đến tính thứ tự và dẫn đến sai lầm. Cụ thể ta thấy: Giả sử có 4 đội bóng A, B, C, D. Nếu theo suy luận như trên thì ta sẽ lập được các trân đấu giữa A và B, B và A, ...Như vậy A và B sẽ gặp nhau hai lần điều này mâu thuẫn với yêu cầu bài toán. Như vậy trong giải toán ta cần phải cần phải phân biệt thứ tự có quan trọng hay không để áp dụng đúng công thức về tổ hợp và chỉnh hợp.

2.3. Vận dụng PPDH phát hiện và GQVĐ vào dạy học quy tắc phương pháp

Định hướng và biện pháp dạy học quy tắc, phương pháp theo hướng dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề.

Dạy học quy tắc phương pháp theo hướng phát hiện và giải quyết vấn đề phải tạo tình huống gợi vấn đề thoả mãn các điều kiện sau:

- Đảm bảo tính chất thuật giải

- Tiết kiệm tư duy

- Giúp HS tránh được các sai sót thường gặp

- Quy tắc không quá phức tạp và cồng kềnh

Nét nổi bật nhất khi vận dụng phát hiện và giải quyết vấn đề vào dạy học loại tri thức này là: GV tạo tình huống gợi vấn đề để cho HS tìm tòi xây dựng nên những quy tắc, phương pháp, chứ không phải GV trình bày sẵn các biện pháp có thể sử dụng đã được nêu ở trên.

Nhiều người cho rằng đã là tri thức có tính quy tắc, phương pháp thì không thể vận dụng được phương pháp phát hiện và giải quyết vấn đề. Đây là quan điểm sai lầm, vì loại tri thức có tính chất thuật toán vẫn có thể vận dụng dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề một cách có hiệu quả.

Sau đây chúng tôi minh họa việc dạy học một số quy tắc.

2.3.1. Quy tắc cộng

Thể hiện qua các hoạt động của GV và HS dưới đây:

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	GV: Một trường THPT được cử một HS đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một HS tiên tiến trong lớp 11A hoặc 11B. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp 11A có 31 HS tiên tiến, lớp 11B có 22 HS tiên tiến? HS: Nhà trường có hai phương án chọn. Phương án thứ nhất là chọn một HS tiên tiến của lớp 11A, phương án này có 31 cách chọn. Phương án thứ hai là chọn một HS tiên tiến của lớp 11B, phương án này có 22 cách chọn. Vậy nhà trường có tất cả $31 + 22 = 53$ cách chọn. GV: Có các chữ số 0, 1, ..., 5. Lập được bao nhiêu số có 2 chữ số khác nhau chia hết cho 5?

	HS: Số chia hết cho 5 thì có chữ số tận cùng bằng 0 hoặc 5. Nếu tận cùng bằng 0 thì sẽ có 5 số: 10, 20, 30, 40, 50. Nếu tận cùng là 5 thì sẽ có 4 số: 15, 25, 35, 45. Vậy sẽ có 4 + 5 = 9 số. GV: Trong hai ví dụ trên ta thấy có đặc điểm chung là đều yêu cầu tìm số cách để hoàn thành một công việc. Mà các công việc này đều được hoàn thành bởi việc thực hiện một trong hai hành động. Vậy vấn đề đặt ra là cách tổng quát để giải quyết các bài toán kiểu này? HS: Nhận biết vấn đề là cần phải đi tìm quy tắc giải tổng quát
Tìm giải pháp	GV: Trong ví dụ 1: Công việc được yêu cầu là chọn một HS tiên tiến trong số các HS tiên tiến của hai lớp 11A và 11B. Công việc này sẽ được hoàn thành bởi việc thực hiện một trong hai hành động Hành động 1. Chọn một HS tiên tiến của lớp 11A Hành động 2. Chọn một HS tiên tiến của lớp 11B Các cách thực hiện hành động một trùng lặp với cách thực hiện nào của hành động hai hay không? HS: Các cách thực hiện hành động một không trùng lặp với bất kỳ cách nào của hành động hai. GV: Trong ví dụ 2 ta thấy: Công việc được yêu cầu là từ các chữ số 0, 1, ..., 5. Hãy lập một số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau chia hết cho 5. Công việc này được hoàn thành bởi việc thực hiện một trong hai hành động Hành động 1. Lập một số tự nhiên gồm hai chữ số có số tận cùng bằng 5 Hành động 2. Lập một số tự nhiên gồm hai chữ số có số tận

	cùng bằng 0 Các cách thực hiện hành động một trùng lặp với cách thực hiện nào của hành động hai hay không ? HS: Các cách thực hiện hành động một không trùng lặp với bất kỳ cách nào của hành động hai. GV: Trong hai ví dụ trên thì số cách để hoàn thành công việc chính bằng tổng số cách thực hiện hành động một và hành động hai. Đó chính là việc vận dụng quy tắc cộng. Vậy em hãy phát biểu nội dung quy tắc cộng?
Trình bầy giải pháp	HS: Quy tắc cộng: Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kỳ cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện GV: Trong việc vận dụng quy tắc cộng điều các em phải đặc biệt lưu ý là số cách thực hiện hành động này không được trùng lặp với bất kỳ cách nào của hành động kia.
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Tương tự như quy tắc cộng với hai hành động. Hãy mở rộng quy tắc cộng cho nhiều hành động? HS: ... GV: Trong ví dụ 1, kí hiệu A là tập hợp cac bạn HS tiên tiến của lớp 11A, B là tập hợp các bạn HS tiên tiến của lớp 11B. Nêu mối quan hệ giữa số cách chọn một bạn HS tiên tiến và số các phần tử của hai tập hợp A, B, $A \cup B$. HS: Trả lời - Số cách chọn một HS tiên tiến của lớp 11A chính bằng số phần tử của tập hợp A - Số cách chọn một HS tiên tiến của lớp 11B chính bằng số phần

	tử của tập hợp B - Số cách chọn một HS tiên tiến trong số các HS tiên tiến của hai lớp 11A và 11B chính bằng số phần tử của tập hợp $A \cup B$ GV: Quy tắc cộng được phát biểu thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau: Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì $$n\left(A \cup B\right) = n\left(A\right) + n\left(B\right)$$ GV: Yêu cầu HS trả lời các câu hỏi trong các bài toán sau: Bài toán 1: Trong một cuộc thi tìm hiểu về đất nước Việt Nam, ban tổ chức công bố danh sách các đề tài bao gồm: 8 đề tài về lịch sử, 7 đề tài về thiên nhiên, 7 đề tài về con người và 6 đề tài về văn hoá. Mỗi thí sinh được quyền chọn một đề tài. Hỏi mỗi thí sinh có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài. HS: Để hoàn thành công việc chọn đề tài thì thí sinh chỉ cần thực hiện một trong bốn hành động sau: Hành động 1: Chọn một đề tài về lịch sử. Có 8 cách Hành động 2: Chọn một đề tài về thiên nhiên. Có 7 cách Hành động 3: Chọn một đề tài về con người. Có 7 cách Hành động 4: Chọn một đề tài về văn hóa. Có 6 cách Vậy có 8 + 7 + 10 + 6 =31 cách lựa chọn đề tài. GV:Tìm sai lầm trong lời giải bài toán sau: Có 5 chữ số 0, 1, 2, 3, 5. Có bao nhiêu số có 2 chữ số khác nhau chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 5? *Lời giải* Hành động 1: Lập một số chia hết cho 5. Số chia hết cho 5 thì số tận cùng bằng 0 hoặc 5. Sẽ có 7 số là: 10, 20, 30, 50, 15, 25, 35.

	Hành động 2: Lập một số chia hết cho 2. Số chia hết cho 2 thì số tận cùng bằng 0 hoặc 2. Sẽ có 7 số là: 10, 20, 30, 50, 12, 32, 52. Vậy theo quy tắc cộng sẽ có 7 + 7 = 14 số thỏa mãn yêu cầu bài toán. HS: Áp dụng sai quy tắc cộng, Việc thực hiện hai hành động 1, và 2 có các kết quả trùng nhau là 10, 20, 30, 50. *Lời giải đúng* Hành động 1: Lập một số hết cho 5 mà không chia hết cho 2. Có 3 số thỏa mãn: 15, 25, 35 $\Rightarrow$ có 3 cách thực hiện Hành động 2: Lập một số chia hết cho 2. Có 7 cách thực hiện (như trên). Vậy theo quy tắc cộng thì số cách lập được một số tự nhiên gồm hai chữ số khác nhau chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 5 là 7 + 3 = 10 số. GV: Trong quy tắc cộng ta chú ý: Nếu một công việc được hoàn thành bởi hành động A hoặc B thì A và B phải là hai hành động phân biệt thì mới áp dụng được quy tắc cộng.

2.3.2. Quy tắc nhân

Thể hiện qua các hoạt động của GV và HS dưới đây:

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm	GV: Có hai kiểu mặt đồng hồ đeo tay (vuông, tròn) và ba kiểu dây (Kim loại, da, nhựa). Hỏi có bao nhiêu cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây?

nhập vấn đề	HS: Với mỗi kiểu mặt đồng hồ sẽ có 3 cách chọn kiểu dây. Vì có 2 cách chọn kiểu mặt đồng hồ nên có tất cả $2 \cdot 3 = 6$ cách chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây GV: Từ thành phố A đến thành phố B có ba con đường, từ B đến C có bốn con đường. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ thành phố A đến thành phố C, qua thành phố B? HS: Với mỗi cách đi từ thành phố A đến thành phố B thì sẽ có tương ứng bốn cách đi từ thành phố B đến thành phố C. Vì có ba cách đi từ thành phố A đến thành phố B nên sẽ có tất cả $3 \cdot 4 = 12$ cách đi từ thành phố A đến thành phố C, qua thành phố B. GV: Trong hai ví dụ trên ta thấy có đặc điểm chung là đều yêu cầu tìm số cách để hoàn thành một công việc. Mà các công việc này đều được hoàn thành bởi việc thực hiện hai hành động liên tiếp. Vậy vấn đề đặt ra là cách tổng quát để giải quyết các bài toán kiểu này? HS: Nhận biết vấn đề là cần phải đi tìm quy tắc giải tổng quát hai bài toán ở trên.
Tìm giải pháp	GV: Trong ví dụ 1, công việc được yêu cầu là chọn một chiếc đồng hồ gồm một mặt và một dây. Có nhận xét gì về cách thức để hoàn thành công việc này? HS: Ta phải tiến hành liên tiếp hai hành động: Hành động 1. Chọn kiểu mặt Hành động 2. Chọn kiểu của dây GV: Mối liên hệ giữa số cách thực hiện hành động 1 và hành động 2? HS: Mỗi cách thực hiện hành động 1 thì tương ứng với 3 cách thực hiện hành động 2

	GV: Trong ví dụ 2, công việc được yêu cầu là đi từ thành phố A đến thành phố C, qua thành phố B. Có nhận xét gì về cách thức hoàn thành công việc này? HS: Ta phải tiến hành liên tiếp hai hành động: Hành động 1. Đi từ A đến B Hành động 2. Đi từ B đến C GV: Mối liên hệ giữa số cách thực hiện hành động 1 và hành động 2? HS: Mỗi cách thực hiện hành động 1 thì tương ứng với 3 cách thực hiện hành động 2 GV: Trong hai ví dụ trên thì số cách để hoàn thành công việc chính bằng tích số cách thực hiện hành động một và hành động hai. Đó chính là việc vận dụng quy tắc nhân. Vậy em hãy phát biểu nội dung quy tắc nhân?
Trình bầy giải pháp	HS: Quy tắc nhân. Nếu một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m \cdot n$ cách hoàn thành công việc. GV: Trong việc vận dụng quy tắc nhân điều các em phải đặc biệt lưu ý là công việc chỉ được hoàn thành khi ta phải tiến hành liên tiếp cả hai hành động và mỗi cách thực hiện hành động này thì tương ứng với bao nhiêu cách thực hiện hành động kia.
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Tương tự như quy tắc nhân với hai hành động. Hãy mở rộng quy tắc nhân cho nhiều hành động liên tiếp? HS:… GV: Lớp 11A có 35 em HS, cần bầu ra một lớp trưởng, một lớp phó, một bí thư và không được bầu một người vào hai hay ba chức

	vụ. Hỏi có bao nhiêu cách? GV: Công việc cần hoàn thành là bầu ra một lớp trưởng, một lớp phó, một bí thư. Để hoàn thành công việc này thì có thể tách thành những hành động nào? HS: Để hoàn thành công việc thì ta tiến hành liên tiếp ba hành động. Hành động 1: Chọn lớp trưởng. Hành động 2: Chọn lớp phó Hành động 3: Chọn bí thư GV: Như vậy để hoàn thành công việc ta tiến hành liên tiếp ba hành động nói trên. Vậy sẽ có bao nhiêu cách hoàn thành công việc? HS: Ở hành động 1, chọn lớp trưởng ta sẽ có 35 cách chọn, với mỗi cách chọn lớp trưởng ta sẽ có 34 cách chọn lớp phó, với mỗi cách chọn lớp trưởng và lớp phó ta sẽ có 33 cách chọn bí thư. Vậy theo quy tắc nhân thì công việc sẽ được hoàn thành bởi $35 \cdot 34 \cdot 33 = 39270$ cách. GV: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn, gồm ba chữ số khác nhau? GV: Công việc cần hoàn thành là lập một số tự nhiên gồm ba chữ số khác nhau từ các chữ số ở trên. Để hoàn thành công việc này thì có thể tách thành những hành động nào? HS: Để hoàn thành công việc thì ta tiến hành liên tiếp ba hành động. Hành động 1: Chọn chữ số hamg trăm. Hành động 2: Chọn chữ số hàng chục. Hành động 3: Chọn chữ số hàng đơn vị.

	GV: Hãy đánh giá lời giải sau của bài toán. *Lời giải* Để lập được một số tự nhiên chẵn gồm ba chữ số khác nhau là $\overline{abc}$ (trong đó $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$), thì ta phải tiến hành liên tiếp ba hành động: Hành động 1: Chọn số c có 3 cách chọn Hành động 2: Chọn a có 4 cách chọn Hành động 3: Chọn b có 3 cách chọn Vậy có $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ cách lập, suy ra có 36 số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu của bài toán. GV: Tìm sai lầm và sửa chữa sai lầm? HS: Sai lầm do áp dụng quy tắc nhân sai. Đối với mỗi cách lựa chọn số c không phải có 4 cách chọn số a, vì nếu chọn c bằng 2 hoặc 4 thì chỉ có ba cách chọn số a. *Lời giải đúng* Tách làm hai trường hợp: Trường hợp 1: Chọn c bằng 0, khi đó sẽ có tương ứng 4 cách chọn a và 3 cách chọn b $\Rightarrow 1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$ cách Trường hợp 2: Chọn c bằng 2 hoặc 4, khi đó sẽ có hai cách chọn c và tương ứng sẽ có ba cách chọn a và 3 cách chọn b $\Rightarrow 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ cách. Vậy sẽ có $12 + 18 = 30$ số gồm ba chữ số thoả mãn yêu cầu của bài toán. GV: Trong quy tắc nhân ta chú ý: Nếu có hai hành động thực hiện liên tiếp thì ứng với một cách thực hiện hành động 1 phải có đúng m cách thực hiện hành động 2 thì mới áp dụng được quy tắc nhân.

2.3.3. Quy tắc cộng xác suất

Nếu hai biến cố A và B xung khắc, thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	GV: Một chiếc hộp có 4 thẻ đánh số từ 1 đến 4. Rút ngẫu nhiên hai thẻ rồi nhân hai số ghi trên hai thẻ với nhau. Tính xác suất để kết quả nhận được là một số chẵn. GV: Có thể tách biến cố H "tích hai số trên hai thẻ là số chẵn" thành các biến cố nào? HS: Có thể tách biến cố H thành các biến cố A "Hai thẻ rút ra có một số chẵn và một số lẻ" B "Hai thẻ rút ra đều là số chẵn" GV: Chú ý là ở đây ta không quan tâm đến thứ tự các thẻ được rút ra. Vậy có nhận xét gì về quan hệ của H, A, B (tính xung khắc, biến cố hợp,...) HS: A và B xung khắc, $H = A \cup B$ GV: Hãy tính xác xuất của các biên cố A, B, H HS: (Câu trả lời mong đợi) $n(\Omega) = C_4^2 = 6;\ n(A) = 4;\ n(B) = 1$ $H = A \cup B \Rightarrow n(H) = n(A) + n(B) = 5$ $P(A) = \frac{4}{6};\ P(B) = \frac{1}{6};\ P(H) = \frac{5}{6}$ GV: Ta có A và B xung khắc $H = A \cup B$. Dựa vào kết quả đã tính được thì có mối liên hệ gì giữa P(A), P(B), P(H) hay không?

	HS: $P(H) = P(A) + P(B)$ GV: Vậy vấn đề đặt ra, xét trong trường hợp tổng quát. Nếu A và B là các biến cố liên quan đến một phép thử có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện và A, B xung khắc, thì liệu $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ hay không? HS: Phát hiện ra vấn đề là cần xét mối liên hệ giữa $P(A \cup B)$, $P(A),\ P(B)$ trong trường hợp tổng quát.
Tìm giải pháp	GV: A và B xung khắc thì có mối liên hệ gì giữa $n\left(A \cup B\right)$; $n\left(A\right);\ n\left(B\right)$? HS: Ta có $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ GV: Nếu ta chia đều 2 vế của đẳng thức trên cho $n\left(\Omega\right)$ thì ta được điều gì? HS: Hiểu được khi chia đều 2 vế của đẳng thức trên cho $n\left(\Omega\right)$ thì ta được $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Trình bầy giải pháp	Vì A, B xung khắc nên $$n\left(A \cup B\right) = n\left(A\right) + n\left(B\right) \Rightarrow \frac{n\left(A \cup B\right)}{n\left(\Omega\right)} = \frac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)} + \frac{n\left(B\right)}{n\left(\Omega\right)}$$ $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ GV: Nhận xét kết quả thực hiện bài toán của HS. Ta có định lí. Giả sử A và B là các biến cố liên quan đến một phép thử có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khi đó a) $P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1.$ b) $0 \le P(A) \le 1$ c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ A, B là các biến cố xung khắc

Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Hãy chứng minh khẳng định sau: Với mọi biến cố A, ta có $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ HS: A và $\overline{A}$ xung khắc nên $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$ Mặt khác $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$. Nên suy ra: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ GV: Từ một hộp chứa 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên đồng thời bốn quả. Tính xác suất sao cho: a) Bốn quả lấy ra cùng mầu. b) Có ít nhất một quả mầu trắng. GV: Để tính xác xuất bốn quả lấy ra cùng mầu ta phải đi xác định những yếu tố nào? HS: Ta phải đi xác định số cách lấy ngẫu nhiên đồng thời bốn quả cầu bất kỳ, và số cách lấy ra đồng thời bốn quả cùng mầu. GV: Nếu gọi biến cố H: “Bốn quả cầu lấy ra cùng màu” thì biến cố H là hợp của hai biến cố nào ? HS: Biến cố H là hợp của hai biến cố A và B. Trong đó A: “Bốn quả lấy ra cùng mầu trắng” B: “Bốn quả lấy ra cùng mầu đen” GV: Vậy có thể tính xác xuất biến cố H như thế nào? HS: Vì A, B xung khắc nên $P(H) = P(A) + P(B)$ $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}$; $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$ $P(H) = \frac{1}{14} + \frac{1}{210} = \frac{8}{105}$ GV: Nếu gọi biến cố C: “Bốn quả cầu lấy ra có ít nhất một quả mầu trắng” thì làm cách nào tính được xác suất của biến cố C? HS: Tìm số phần tử của biến cố C bằng cách xét bốn trường hợp:

	Trường hợp 1: Trong bốn quả cầu được lấy ra có đúng một quả mầu trắng Trường hợp 2: Trong bốn quả cầu được lấy ra có đúng hai quả cầu mầu trắng Trường hợp 3: Trong bốn quả cầu được lấy ra có đúng ba quả cầu mầu trắng Trường hợp 4: Cả bốn quả cầu được lấy ra đều mầu trắng Từ đó suy ra xác suất của biến cố C GV: Có một cách khác để tìm xác suất của biến cố C, đó là đi tính xác suất biến cố đối của biến cố C. Hãy thực hiện giải bài toán theo cách này? HS: Biến cố đối của biến cố C chính là biến cố B. Vậy ta có $P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210}$ GV: Như vậy trong bài toán này việc xác định xác suất của biến cố C thông qua xác xuất biến cố đối của nó cho ta được lời giải đơn giản và nhanh gọn hơn.

2.4. Vận dụng dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề vào dạy bài tập

Vài nét về dạy bài tập toán ở nhà trường phổ thông

Ở trường phổ thông, dạy toán là dạy hoạt động toán học. Đối với học sinh, việc giải toán là hoạt động chủ yếu của hoạt động toán học.

Các bài toán ở phổ thông là phương tiện rất có hiệu quả và không thể thay thế được trong việc giúp học sinh nắm vững tri thức, phát triển tư duy, hình thành kỹ năng, kỹ xảo, ứng dụng toán học vào thực tiễn. Hoạt động giải bài tập toán học là điều kiện tốt để thực hiện mục đích dạy học toán ở trường trung học phổ thông.

Trong môn Toán, bài tập có chức năng sau:

1. Chức năng dạy học
2. Chức năng phát triển
3. Chức năng giáo dục
4. Chức năng kiểm tra

Hiệu quả của việc dạy học toán ở trường phổ thông phần lớn phụ thuộc vào khai thác và thực hiện đầy đủ các chức năng có thể của một bài tập mà người biên soạn sách giáo khoa có ý chuẩn bị. Người giáo viên có thể khám phá và thực hiện nội dung đó bằng năng lực sư phạm hay trình độ nghệ thuật của mình.

Các bài tập chương " Tổ hợp và xác suất" là môi trường tốt để học sinh rèn luyện và phát triển các thao tác tư duy cơ bản như: phân tích, tổng hợp, tương tự, khái quát hóa, đặc biệt hóa... dưới sự hướng dẫn điều khiển của giáo viên.

Định hướng vận dụng dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề vào dạy học giải bài tập.

Khi dạy học giải bài tập toán theo xu hướng phát hiện và GQVĐ, yêu cầu bài toán đặt ra phải thực sự gợi vấn đề, tức khêu gợi cho học sinh những khó khăn trong tư duy, hành động, chứ không dừng lại ở việc yêu cầu học sinh trực tiếp vận dụng qui tắc có tính chất thuật toán. Điều này chỉ có tính tương đối, bởi lẽ có những bài toán là vấn đề đối với người này nhưng không là vấn đề nhưng đối với người khác.

Những vấn đề ở đây thường là những bài toán mà học sinh chưa biết thuật giải. Đây là cơ hội tốt để giáo viên trang bị cho học sinh một số tri thức phương pháp, cụ thể ở đây là phương pháp giải toán nhằm rèn luyện và phát triển tư duy khoa học ở học sinh.

Khi dạy giải bài tập toán theo hướng phát hiện và GQVĐ nên tham khảo phương pháp của Polya gồm 4 bước sau:

Bước 1: Tìm hiểu nội dung bài toán

Trong dạy học phát hiện và GQVĐ muốn học sinh thực hiện tốt bước này thì giáo viên tạo tình huống bao hàm nội dung bài toán sao cho có khêu gợi trí tò mò và hứng thú của học sinh, giúp các em tích cực bắt tay vào tìm hiểu bài toán và suy nghĩ tìm lời giải.

Bước 2: Xây dựng chương trình giải

Ở bước này giáo viên gợi cho học sinh phân tích bài toán đã cho thành các bài toán đơn giản hơn, huy động những kiến thức liên quan đến các dữ kiện của bài toán, mò mẫm, dự đoán, thử xét một vài khả năng (kể cả trường hợp đặc biệt, xét một bài toán tương tự hoặc bài toán khái quát hóa của bài toán đã cho).

Dạy học theo xu hướng này giáo viên điều khiển những hoạt động tìm tòi suy nghĩ của học sinh để GQVĐ bằng hệ thống câu hỏi, gợi ý, dẫn dắt phù hợp và đúng lúc. Các qui tắc thường dùng là suy ngược, suy xuôi, qui lạ về quen.

Bước 3: Thực hiện chương trình giải

Sau khi xây dựng song chương trình giải, giáo viên giúp học sinh trình bày tường minh bài giải.

Bước 4: Kiểm tra, nghiên cứu lời giải

Kiểm tra lại xem lời giải có sai lầm hoặc thiếu sót không, nhất là những bài toán có đặt điều kiện hoặc biện luận. Đồng thời nâng cao dần yêu cầu đi sâu cải tiến cách phát hiện và GQVĐ, khai thác vấn đề, đề xuất vấn đề mới và giải quyết nếu có thể.

Những ví dụ minh họa về việc dạy học bài tập trong chương tổ hợp và xác xuất theo hướng phát hiện và giải quyết vấn đề

2.4.1. Các bài toán về biến đổi công thức tổ hợp

Bài toán 1. Chứng minh công thức sau:

$$C_n^k + 2C_n^{k-1} + C_n^{k-2} = C_{n+2}^k \quad (2 \le k \le n)$$

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	*Đây là một tình huống gợi vấn đề vì:* - HS chưa có một quy tắc mang tính chất thuật giải để giải bài toán trên - HS chưa biết ngay lời giải, nhưng đã biết các công thức về số tổ hợp chỉnh hợp... cho nên nó gợi nhu cầu nhận thức của HS và gây niềm tin có khả năng tự giải quyết.
Tìm giải pháp	GV: Có tìm được cách giải không? HS: Thay $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, ... và đồng nhất 2 vế. GV: Đúng, nhưng cách giải trên khá dài và phức tạp. Hãy tìm một cách giải đơn giản hơn? HS: ??? GV: Bài toán trên liên quan đến công thức về số tổ hợp. Ta đã biết được những công thức nào về số tổ hợp? HS:- Nhớ lại xem có các công thức nào liên quan C_n^k không - Phát hiện được có 2 công thức là: $C_n^k = C_n^{n-k}$ (1) và $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (2) - Trả lời: Có 2 công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$ và $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ GV: Có thể vận dụng được vào bài toán trên không? Có công thức nào tương tự các biểu thức trong đề bài không?

	HS: Phát hiện công thức (2) khá giống vế trái GV: Để áp dụng công thức (2) ta phải tách vế trái như thế nào? HS: $VT = C_n^k + 2C_n^{k-1} + C_n^{k-2} = (C_n^k + C_n^{k-1}) + (C_n^{k-1} + C_n^{k-2})$
Trình bầy giải pháp	Nhận thấy cần tách vế trái của (1) thành: $VT = C_n^k + 2C_n^{k-1} + C_n^{k-2} = (C_n^k + C_n^{k-1}) + (C_n^{k-1} + C_n^{k-2})$ $= C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1} = C_{n+2}^k = VP$ $\Rightarrow$ Đpcm.
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Có thể vận dụng cách giải tương tự bài toán trên để giải các bài Toán sau hay không? Chứng minh rằng: $C_n^k + 3C_n^{k-1} + 3C_n^{k-2} + C_n^{k-3} = C_{n+3}^k \quad (3 \le k \le n)$ HS: - Phát hiện VT đều là công thức số tổ hợp của tập có n phần tử $\rightarrow$ tách ra áp dụng công thức (2) tương tự cách giải bài toán trên Biến đổi $VT = C_n^k + C_n^{k-1} + 2(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) + C_n^{k-2} + C_n^{k-3}$ Làm như sau: $VT = (C_n^k + C_n^{k-1}) + 2(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) + (C_n^{k-2} + C_n^{k-3})$ $= C_{n+1}^k + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2} = (C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}) + (C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2})$ $= C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1} = C_{n+3}^k = VP$

2.4.2. Các bài toán liên quan đến nhị thức Niu-tơn

Bài toán 2. Tìm số hạng không chứa x của khai triển $\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^8$, với $x > 0$.

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và	*Đây là một tình huống gợi vấn đề vì:* - HS chưa có một quy tắc mang tính chất thuật giải để giải bài toán

thâm nhập vấn đề	trên - HS chưa biết ngay lời giải, nhưng đã biết công thức về nhị thức Niu-tơn cho nên nó gợi nhu cầu nhận thức của HS và gây niềm tin có khả năng tự giải quyết.
Tìm giải pháp	Đàm thoại phát hiện để giải bài toán HS: Ta có: $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left(x\right)^{8-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^kx^{8-2k}$ GV: Số hạng không chứa x tương ứng với điều gì? HS: - Phát hiện số hạng không chứa x tương ứng với $8-2k=0$ - Giải quyết: $8-2k=0$ - Lời giải: (tiếp)
Trình bầy giải pháp	$\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left(x\right)^{8-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^kx^{8-2k}$ Số hạng không chứa x tương ứng với $8-2k=0\Leftrightarrow k=4$ vậy số hạng không chứa x là C_8^4
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Có yếu tố nào của bài toán trên có thể tổng quát được không? HS: - Phát hiện $x^3;\ \frac{1}{x}$ trong đề bài có thể tổng quát lên được. - Giải quyết: Thay bằng $ax^\alpha;\frac{b}{x^\beta}$; Cách giải tương tự. - Trả lời: Bài toán tổng quát: a) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $(ax^\alpha+\frac{b}{x^\beta})^n$ b) Tìm số hạng chứa x^δ trong khai triển $(ax^\alpha+\frac{b}{x^\beta})^n$

Bài toán 3. Từ khai triển biểu thức $\left(3x-4\right)^{17}$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	*Đây là một tình huống gợi vấn đề vì:* - HS chưa có một quy tắc mang tính chất thuật giải để giải bài toán trên - HS chưa biết ngay lời giải, nhưng đã biết công thức về nhị thức Niu-tơn cho nên nó gợi nhu cầu nhận thức của HS và gây niềm tin có khả năng tự giải quyết.
Tìm giải pháp	GV: Hãy viết công thức khai triển của biểu thức $\left(3x-4\right)^{17}$? HS: $\left(3x-4\right)^{17}=\sum_{k=0}^{17}\left(-1\right)^{k}C_{17}^{k}\left(3x\right)^{17-k}4^{k}=\sum_{k=0}^{17}\left(-1\right)^{k}C_{17}^{k}3^{17-k}4^{k}x^{17-k}$ GV: Khi cho $x=1$ thì biểu thức vế phải cho ta điều gì ? HS: Phát hiện khi thay $x=1$ vào hai vế của đẳng thức thì biểu thức ở vế phải chính là tổng các hệ số của đa thức của khai triển $\left(3x-4\right)^{17}$. *(Từ đó học sinh phát hiện ra cách thức giải quyết bài toán.)*
Trình bầy giải pháp	$\left(3x-4\right)^{17}=\sum_{k=0}^{17}\left(-1\right)^{k}C_{17}^{k}\left(3x\right)^{17-k}4^{k}=\sum_{k=0}^{17}\left(-1\right)^{k}C_{17}^{k}3^{17-k}4^{k}x^{17-k}$ Vậy tổng các hệ số của đa thức nhận được là $\sum_{k=0}^{17}\left(-1\right)^{k}C_{17}^{k}3^{17-k}4^{k}=\left(3-4\right)^{17}=-1$
Nghiên cứu sâu	GV: Phát biểu bài toán tổng quát, và cách giải? HS: Phát hiện $(3x-4)^{17}$ có thể tổng quát thành $(a+bx)^{n}$

giải pháp	Bài toán tổng quát: Từ khai triển $(a+bx)^n$ thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được Cách giải: Tương tự như cách giải bài toán trên ta có $(a+bx)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k x^k$. Vậy tổng các hệ số của đa thức trong khai triển là: $\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=\left(a+b\right)^n$

Bài toán 4. Với n nguyên dương, chứng minh:

a) $C_n^0+C_n^1+...+C_n^n=2^n$

b) $C_{2n}^0+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}$

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	*Đây là một tình huống gợi vấn đề vì:* - HS chưa có một quy tắc mang tính chất thuật giải để giải bài toán trên - HS chưa biết ngay lời giải, nhưng đã biết công thức về nhị thức Niu-tơn cho nên nó gợi nhu cầu nhận thức của HS và gây niềm tin có khả năng tự giải quyết.
Tìm giải pháp	*Hướng dẫn tìm giải pháp giải phần a.* GV: Các số hạng ở vế trái có xuất hiện ở công thức quen thuộc nào không? HS: - Phát hiện và giải quyết: Nhớ lại các công thức đã học và nhận thấy công thức Niu-tơn có liên quan đến $C_n^0, C_n^1, ...$ - Trả lời: Khai triển nhị thức Niu-tơn có xuất hiện

	$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^n b^n.$$ GV: Làm thế nào để xuất hiện tổng ở vế trái? HS: Phát hiện và giải quyết: Cho đồng nhất thì được $a^n = 1$, $a^{n-1}b = 1, ..., b^n = 1$ Trả lời: Chọn $a = b = 1$ thì ta có đpcm. *Hướng dẫn tìm giải pháp giải phần b.* GV: Có thể suy nghĩ tương tự câu a) được không? HS: - Phát hiện được có đẳng thức liên quan đến $C_{2n}^0, C_{2n}^1, ..., C_{2n}^{2n}$ - Giải quyết: Chú ý đến hệ thức $(a+b)^{2n}$ và cần tìm a,b để liên quan đến các tổng ở đề bài. - Lập khai triển: $$(a+b)^{2n} = C_{2n}^0 a^{2n} + C_{2n}^1 a^{2n-1} b + ... + C_{2n}^{2n} b^{2n} \quad (*)$$ GV: Cần biến đổi gì với hai tổng $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n}$ và $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}$ để xuất hiện (*) HS: - Phát hiện (*) gồm tất cả $C_{2n}^0, C_{2n}^1, ..., C_{2n}^{2n}$; Tổng thứ nhất có: C_{2n}^0, C_{2n}^2, ..., C_{2n}^{2n} (các tổ hợp chập chẵn); Tổng thứ 2 có: C_{2n}^1, C_{2n}^3, ..., C_{2n}^{2n-1} (các tổ hợp chập lẻ) - Giải quyết: Cộng hoặc trừ 2 tổng và chọn a,b thích hợp để dẫn đến xuất hiện (*)
Trình bầy giải pháp	*Lời giải* Phần a. $VP = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = (a+b)^n = (1+1)^n = 2^n = VT$ $\Rightarrow$ Đpcm Phần b.

	$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n} - (C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1})$ $= C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + ... - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ $= (1-1)^{2n} = 0$ $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n} + C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}$ $= C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ $= (1+1)^{2n} = 2^{2n}$ Vậy: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1} \Rightarrow$ Đpcm
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Bài toán trên đã vận dụng công thức nhị thức Niu-tơn để chứng minh một công thức (công thức này thực chất là một dạng cụ thể của nhị thức Niu-tơn, hoặc được biến đổi qua vài bước...). Hãy vận dụng 2 hệ thức $(a+b)^n$ và $(1+x)^n$ để thiết lập các hệ thức khác bằng cách chọn a, b, x và biến đổi.

2.4.3. Các bài toán vận dụng quy tắc phép đếm

Bài toán 5. Giả sử có bảy bông hoa màu khác nhau và ba lọ hoa. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba lọ hoa đã cho (Mỗi lọ cắm một bông) ?

a) Các lọ hoa giống nhau ?

b) Các lọ hoa khác nhau ?

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	*Đây là một tình huống gợi vấn đề vì:* - HS chưa có một quy tắc mang tính chất thuật giải để giải bài toán trên - HS chưa biết ngay lời giải, nhưng đã biết các khái niệm tổ hợp, chỉnh hợp,...các công thức về số tổ hợp, số chỉnh hợp,.. cho nên nó

	gợi nhu cầu nhận thức của HS và gây niềm tin có khả năng tự giải quyết.
Tìm giải pháp	GV: Mỗi cách chọn ba bông hoa trong số bảy bông hoa khác nhau thì tương ứng với mấy cách cắm ba bông hoa đó vào ba lọ giống nhau ? HS: Phát hiện và giải quyết: Do ba lọ hoa giống nhau nên với ba bông hoa khác nhau thì chỉ có một cách cắm ba bông hoa đó vào ba lọ. GV: Vậy để giải quyết phần a của bài toán ta làm như thế nào ? HS: Ta chỉ việc đi tính số cách lấy ba bông hoa trong số bảy bông hoa khác nhau. GV: Giả sử có ba bông hoa khác nhau A, B, C thì có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa đó vào ba lọ hoa khác nhau a, b, c ? HS: - Phát hiện có thể cắm Aa, Bb, Cc ; Ba, Ab, Cc ; ... (liệt kê được 6 cách cắm khác nhau) - Giải pháp: Có thể tính số cách cắm bằng việc liệt kê hoặc có thể nhận thấy mỗi hoán vị của ba bông hoa thì tương ứng với một cách cắm vào ba lọ hoa khác nhau, vậy số cách cắm hoa là $P_3 = 3! = 6$ - Trả lời: Có 6 cách cắm. GV: Vậy để giải phần b của bài toán ta làm như thế nào ? HS: Để có một cách cắm hoa ta tiến hành hành liên tiếp hai hành động Hành động 1: Chọn ba bông hoa trong số bẩy bông hoa đã cho có $C_7^3 = 35$ (Cách) Hành động 2: Chọn một hoán vị của ba bông hoa đã chọn ra ở

	hành động 1 có $P_3 = 3! = 6$ Vậy theo quy tắc nhân ta sẽ có $35 \cdot 6 = 210$ cách cắm GV: Một hướng suy nghĩ khác là các em có nhận xét gì về mỗi chỉnh hợp chập ba của tập bảy phần tử so với mỗi cách cắm hoa. HS: Mỗi chỉnh hợp chập thì tương ứng với một cách cắm. Vậy số cách cắm chính bằng số chỉnh hợp chập ba của tập bảy phần tử
Trình bầy giải pháp	*Lời giải* a) Mỗi cách cắm ba bông hoa trong bảy bông hoa khác nhau vào ba lọ giống nhau thì tương ứng với một tổ hợp chập 3 của tập 7 phần tử. Vậy số cách cắm $C_7^3 = 35$ (Cách) b) Mỗi cách cắm ba bông hoa trong bảy bông hoa khác nhau vào ba lọ khác nhau thì tương ứng với một chỉnh hợp chập 3 của tập 7 phần tử. Vậy số cách cắm $A_7^3 = 210$ (Cách)
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Cần dựa vào tính chất yêu cầu của bài toán mà lựa chọn các công thức thích hợp, yêu cầu thứ tự (cùng công việc) thì sử dụng chỉnh hợp; không cần thứ tự (khác công việc) thì sử dụng tổ hợp. Phần b của bài toán có thể giải quyết bằng cách vận dụng quy tắc nhân, nhưng lời giải sẽ không gọn gàng như ta vận dụng khái niệm chỉnh hợp. GV: Có thể áp dụng cách giải bài toán trên cho bài toán sau hay không ? Bài toán: Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 lọ hoa khác nhau (Mỗi lọ cắm không quá một bông) nếu: a) Các bông hoa như nhau ? b) Các bông hoa khác nhau ?

	HS: - Phát hiện: Trong bài toán này số lượng lọ hoa nhiều hơn số lượng các bông hoa, vậy để tính số cách cắm hoa ta tiến hành công việc chọn lọ để cắm hoa. + Với mỗi tổ hợp chập 3 của 5 lọ hoa thì tương ứng với một cách cắm ba bông hoa như nhau vào 5 lọ hoa khác nhau. + Với mỗi chỉnh hợp chập 3 của 5 lọ hoa thì tương ứng với một cách cắm ba bông hoa khác nhau vào 5 lọ hoa khác nhau. - Trả lời: Có thể giải bài toán trên bằng cách giải tương tự

Bài toán 6: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 lập các số tự nhiên gồm bốn chữ số khác nhau. Hỏi:

a) Có tất cả bao nhiêu số ?

b) Có bao nhiêu số chẵn ? Bao nhiêu số lẻ ?

c) Có bao nhiêu số chia hết cho 9 ?

d) Bao nhiêu số bé hơn 3400?

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	- HS chưa có một quy tắc mang tính chất thuật giải để giải bài toán trên. - HS chưa biết ngay lời giải, nhưng đã biết các khái niệm tổ hợp, chỉnh hợp,...các công thức về số tổ hợp, số chỉnh hợp,.. cho nên nó gợi nhu cầu nhận thức của HS và gây niềm tin có khả năng tự giải quyết.
Tìm giải pháp	*Hướng dẫn tìm giải pháp giải phần a.* GV: Đã gặp dạng bài quen thuộc nào gần tương tự chưa? HS: Trong bài học định lý số chỉnh hợp, ta đã gặp bài toán: Cho 5

chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Tìm số các số có 3 chữ số khác nhau lập được từ 5 chữ số trên. Và số các số thỏa mãn yêu cầu là A_5^3 số.

GV: Có áp dụng cách giải bài toán trên vào bài này được không?

HS: Gặp vấn đề ở chỗ, các chỉnh hợp bắt đầu bởi số 0 ví dụ như 0123, 0125,... không cho ta một số có 4 chữ số thoả mãn đề bài, do đó số các số cần tìm không phải là A_6^4.

GV: Vậy phải giải quyết vấn đề trên như thế nào?

HS: Đã biết số các chỉnh hợp chập 4 của 6 chữ số (tương ứng tất cả các số có 4 chữ số khác nhau cộng với các số dạng 0123, 0124, ...), vậy chỉ cần loại ra số các những chỉnh hợp bắt đâu bởi số 0 sẽ được số các số thoả mãn đề bài.

GV: Đúng. Làm cách nào để tìm ra số các chỉnh hợp chập 4 của 6 chữ số trên mà bắt đầu bởi chữ số 0 ?

HS: Để tính được cần xây dựng một quy trình lập được một chỉnh hợp kiểu này. Lập một chỉnh hợp như ta cần tiến hành hai hành động liên tiếp:

Hành động 1: Chọn chữ số 0 đặt vào vị trí thứ 1, có 1 cách

Hành động 2: Chọn 3 trong 5 số còn lại đặt vào các vị trí thứ 2, 3, 4, có $A_5^3 = 60$ (Cách)

Vậy có: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ chỉnh hợp.

Vậy có: $A_6^4 - 60 = 300$ số thoả mãn đề bài.

GV: Một hướng khác để giải bài toán trên là ta xác lập một quy trình lập ra số thoả mãn đề bài và dựa vào quy trình để tính số các số lập được. Ta biết một số có 4 chữ số có dạng $\overline{abcd}$ với $a \neq 0$. Quy trình lập được 1 số có 4 chữ số khác nhau $\overline{abcd}$ như thế nào?

HS: Ta sẽ tiến hành liên tiếp hai hành động. Do $a \neq 0$ nên ta sẽ

	chọn a trước sau đó chọn bộ 3 số bcd rồi áp dụng quy tắc nhân. GV: Hãy vận dụng vào bài toán của ta! HS: Biết được cách giải bài toán và thực hiện giải bài toán theo quy trình trên... *Hướng dẫn tìm giải pháp giải phần b.* GV: Cũng với cách lập luận tương tự như phần a) ta cần tìm ra số các số $\overline{abcd}$ thoả mãn yêu cầu. Yêu cầu của bài toán tương ứng với số $\overline{abcd}$ phải thỏa mãn điều gì? Và như vậy thì ta nên chọn số nào trước ? HS: $\overline{abcd}$ có 4 chữ số khác nhau lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 và yêu câu số $\overline{abcd}$ là số chẵn nên suy ra d bằng 0, hoặc 2, hoặc 4. Vậy nên chọn d trước trong quy trình lập số. GV: Như vậy nên chọn d trước, vấn đề của ta bây giờ là xem với mỗi cách chọn d như trên thì cách chọn a,b,c có bị ảnh hưởng gì không? HS: Có. Nếu d bằng 0 thì còn lại 1,2,3,4,5 do đó có 5 cách chọn a. Nếu d bằng 2 thì còn lại 0,1,3,4,5 do đó có 4 cách chọn a... GV: Như vậy chúng ta cần phải làm như thế nào? HS: Ta cần phải chia ra các trường hợp về giá trị của d. Trường hợp 1 là xét với d bằng 0 và trường hợp 2 là xét với d bằng 2 hoặc 4. GV: Hãy thực hiện lời giải trên. HS: Hiểu cách giải và thực hiện giải quyết bài toán... *Hướng dẫn tìm giải pháp giải phần c.* GV: Điều kiện để một số chia hết cho 9 là gì? HS: Tổng các chữ số của số đó chia hết cho 9.

	GV: Hãy vận dụng vào bài toán! HS: Cần tính số các số $\overline{abcd}$ lập từ tập 6 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, có $(a+b+c+d)$ chia hết cho 9. GV: Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể chọn ra được một tập hợp gồm bốn số khac nhau mà có tổng các số chia hết cho 9 hay không ? HS: Từ 5 chữ số đã cho ta lập ra được các các tập hợp có bốn chữ số khác nhau mà có tổng các chữ số chia hết cho 9 là: $\{0,\ 1, 3, 5\}$; $\{0,\ 2, 3, 4\}$. Từ đây HS phát hiện được rằng số gồm bốn chữ số khác nhau thỏa mãn yêu cầu của bài toán phải là số lập từ các chữ số của mỗi tập hợp trên. Từ đó đưa ra lời giải cho bài toán *Hướng dẫn tìm giải pháp giải phần d.* GV: $a=?$ thì sẽ chắc chắn $\overline{abcd}<3400$ HS: a bằng 1 hoặc 2. GV: Nếu $a=3$ thì b, c, d cần điều kiện gì để $\overline{abcd}<3400$ HS: Khi $a=3$ thì b chỉ có thể bằng 1 hoặc 2, còn c, d có thể tùy ý, vì nếu khi $b=4$ thì do một trong hai số c, d sẽ khác số 0 nên $\overline{abcd}>3400$ GV: Vậy quy trình để giải bài toán này? HS: Ta sẽ xét hai trường hợp. Trường hợp 1: chọn a bằng 1 hoặc 2. b, c ,d chọn trong các số còn lại Trường hợp 2: Chọn $a=3$, chọn b bằng 1 hoặc 2, chọn c,d bằng hai trong các số còn lai.
Trình bầy	Gọi số gồm bốn chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 là $\overline{abcd},\ a\neq 0$

giải pháp	a) Để lập được một số $\overline{abcd},\ a \neq 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, ta tiến hành liên tiếp hai hành động. Hành động 1: Chọn số a, có 5 cách chọn Hành động 2: Chọn bộ ba số b, c, d, có $A_5^3 = 60$ cách chọn Vậy có $5 \cdot 60 = 300$ cách lập số $\overline{abcd}$. $\Rightarrow$ có 300 số gồm 4 chữ số thỏa mãn yêu cầu bài toán. b) Số $\overline{abcd},\ a \neq 0$ là số chẵn khi và chỉ khi số d là số chẵn. Ta xét hai trường hợp: Trường hợp 1: Chọn $d = 0$, khi đó: Hành động 1: Chọn d, có 1 cách chọn Hành động 2: Chọn bộ ba số a, b, c, có $A_5^3 = 60$ cách chọn $\Rightarrow$ lập được $1 \cdot 60 = 60$ số $\overline{abcd}$ có số tận cùng $d = 0$ Trường hợp 2: Chọn $d \neq 0$, khi đó: Hành động 1: Chọn d, có 2 cách chọn Hành động 2: Chọn a, có 4 cách chọn Hành động 3: Chọn bộ hai số b, c, có $A_4^2 = 12$ cách chọn $\Rightarrow$ lập được $2 \cdot 4 \cdot 12 = 96$ số $\overline{abcd}$ có số tận cùng d bằng 2 hoặc 4. Vậy có tất cả $60 + 96 = 156$ số chẵn, và có $300 - 156 = 144$ số lẻ, gồm bốn chữ số khác nhau thỏa mãn yêu cầu bài toán. c) Số $\overline{abcd},\ a \neq 0$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi $(a + b + c + d)$ chia hết cho 9. Vậy các chữ số a, b, c, d phải thuộc tập hợp $\{0,\ 1, 3, 5\}$ hoặc $\{0,\ 2, 3, 4\}$ Trường hợp 1: Các chữ số a, b, c, d được chọn từ các số của tập hợp $\{0,\ 1, 3, 5\}$. Khi đó để lập được số $\overline{abcd},\ a \neq 0$ ta tiến hành

	liên tiếp hai hành động: Hành động 1: Chọn a, có 3 cách chọn Hành động 2: Chọn bộ số b, c, d có $3! = 6$ cách chọn $\Rightarrow$ lập được $3 \cdot 6 = 18$ số Trường hợp 2: Các chữ số a, b, c, d được chọn từ các số của tập hợp $\{0, 2, 3, 4\}$. Bằng lập luận tương tự như trên $\Rightarrow$ lập được $3 \cdot 6 = 18$ số Vậy có tất cả $18 + 18 = 36$ số gồm bốn chữ số thỏa mãn yêu cầu của bài toán. d) Vì $\overline{abcd} < 3400$ nên $a \leq 3$. Ta xét bài toán trong hai trường hợp sau: Trường hợp 1: Chọn $a < 3$. Khi đó $\overline{abcd} < 3400$ với mọi số b, c, d Để lập số $\overline{abcd}$ ta tiến hành liên tiếp hai hành động Hành động 1: Chọn a, có 2 cách chọn Hành động 2: Chọn bộ ba số b, c, d, có $A_5^3 = 60$ cách chọn $\Rightarrow$ có $2 \cdot 60 = 120$ số Trường hợp 2: Chọn $a = 3$. Khi đó vì $\overline{abcd} < 3400$ nên b chỉ cỏ thể chọn bằng 1 hoặc 2, còn số b, và c có thể chọn bất kỳ số nào trong các số còn lại *(do yêu cầu của bài toán các số a, b, c, d phải khác nhau)* Để lập số $\overline{abcd}$ ta tiến hành liên tiếp ba hành động Hành động 1: Chọn a, có 1 cách chọn Hành động 2: Chọn bộ ba số b có 2 cách chọn Hành động 3: Chọn bộ hai số c, d có $A_4^2 = 12$ cách chọn $\Rightarrow$ có $1 \cdot 2 \cdot 12 = 24$ số Vậy có tất cả $120 + 24 = 144$ số gồm 4 chữ số khác nhau lập từ

	các chữ số 0, 1, 2, 3 , 4, 5 mà bé hơn 3400
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Nếu giải phần a), ta làm theo cách sau: có 6 cách chọn d, sau khi chọn d thì còn lại 5 chữ số do dó có 5 cách chọn c, sau khi chọn c thì còn lại 4 chữ số do đó sẽ có 4 cách chọn b, và như vậy cuối cùng chọn a sẽ có 3 cách. Vậy sẽ có: $6\cdot5\cdot4\cdot3=360$ số. Sai lầm ở đâu ? HS: Sai lầm ở chỗ với mỗi cách chọn b, c, d xong thi số cách chọn a không phải là 3. Vì nếu b, c, d là 1, 2, 3 thì chỉ còn lại 3 chữ số là 0, 4, 5 nên a chỉ có 2 cách chọn; còn nếu b, c, d là 0, 1, 2 thì còn lại 3 chữ số là 3, 4, 5 nên a có 3 cách chọn. Do đó không thể áp dụng quy tắc nhân như đã làm ở trên. GV: Với các yêu cầu phức tạp chưa nhận thấy công thức ngay, ta cần tách ra các trường hợp nhỏ lẻ và đơn giản, có thể sử dụng nguyên lý bù trừ để tính (trong nhiều trường hợp sẽ đơn giản hơn)

Bài toán 7. Có 4 HS, 2 nam và 2 nữ. Có mấy cách sắp xếp thành 1 hàng sao cho:

a) 2 nam cạnh nhau, 2 nữ cạnh nhau

b) 2 nữ cạnh nhau

c) Nam và nữ đứng xen kẽ

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập	*Đây là một tình huống gợi vấn đề vì:* - HS chưa có một quy tắc mang tính chất thuật giải để giải bài toán - HS chưa biết ngay lời giải, nhưng đã biết các khái niệm tổ hợp, chỉnh hợp,...các công thức về số tổ hợp, số chỉnh hợp,.. cho nên nó

vấn đề	gợi nhu cầu nhận thức của HS và gây niềm tin có khả năng tự giải quyết.
Tìm giải pháp	*Hướng dẫn tìm giải pháp giải phần a.* GV: Bài toán đã biết cách giải chưa? HS: Gọi tên 4 HS và lập thông thường bằng cách sắp sếp. Lời giải: Gọi 2 nam là T_1, T_2, 2 nữ là N_1, N_2 thì có các cách thoả mãn là: (T_1, T_2, N_1, N_2); (T_1, T_2, N_2, N_1); (T_2, T_1, N_1, N_2);... Vậy có 8 cách. GV: Đúng, tuy nhiên hãy chú ý đến yêu cầu 2 nam cạnh nhau và 2 nữ cạnh nhau. Nếu coi 2 nam đứng cạnh nhau là 1 bộ A, 2 nữ đứng cạnh nhau là một bộ B thì có nhận xét gì về cách xếp 2 bộ này? HS: Chỉ có 2 trường hợp: (A, B) và (B, A) và mỗi bộ nam có 2 cách xếp nam, mỗi bộ nữ có 2 cách xếp nữ GV: Vậy ta có cách giải khác như thế nào? HS:... *Hướng dẫn tìm giải pháp giải phần b* GV: Có thể sử dụng phương pháp tương tự câu a được không ? HS: Phát hiện yêu cầu 2 nữ cạnh nhau có thể coi như 1 bộ. 1 bộ 2 nữ và 2 nam coi như 3 người nên có thể áp dụng cách giải tương tự như phần trên để giải quyết bài toán. *Hướng dẫn tìm giải pháp giải phần b* GV: Có cách giải chưa? HS: Ta sẽ có các cách sau: (T_1, N_1, T_2, N_2); (T_1, N_2, T_2, N_1); (T_2, N_1, T_1, N_2); (T_2, N_2, T_1, N_1);... Vậy có 8 cách GV: Nếu vị trí đầu là Nam, Vị trí thứ hai là Nữ (hoặc ngược lại) thì có nhận xét gì về hai vị trí thứ ba và thứ tư ?

	HS: Phát hiện: Nếu vị trí đầu là nam, vị trí thứ hai là nữ thì vị trí thứ ba sẽ là nam còn lại, vị trí thứ tư là nữ còn lại. Nếu vị trí đầu là nữ, Vị trí thứ hai là nam thì vị trí thứ ba sẽ là nữ còn lại còn lại, vị trí thứ tư là nam còn lại. Vậy cần tính số cách sắp xếp 2 vị trí đầu thoả mãn nam, nữ hoặc nữ , nam.
Trình bầy giải pháp	a) Coi 2 nam là một bộ (bộ A), 2 nữ là một bộ (bộ B) ta sẽ có 2 cách xếp 2 bộ này cạnh nhau. Trong mỗi bộ A (hoặc B) ta lại có $P_2 = 2! = 2$ cách xếp 2 nam (hoặc 2 nữ) đứng cạnh nhau. Do đó theo quy tắc nhân ta có $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cách. b) Coi 2 nữ đứng cạnh nhau là 1 cặp B. 2 nam là T_1, T_2. Sẽ có $P_3 = 3! = 6$ cách xếp 3 vị trí (B, T_1, T_2) mà trong cặp B có 2 cách xếp 2 nữ. Vậy theo quy tắc nhân sẽ có $6 \cdot 2 = 12$ cách. c) Nếu biết 2 vị trí đầu thì chỉ có 1 cách xác định 2 vị trí sau. Do đó số cách xếp thoả mãn chính là số cách xếp 2 vị trí đầu (đảm bảo nam, nữ đứng xen kẽ). Có 4 cách chọn 1 người đặt ví trí 1, với mỗi cách đặt đó sẽ có 2 cách đặt vào vị trí thứ 2 (Nếu vị trí 1 là nam thì vị trí 2 phải đặt 1 trong 2 nữ, tương tự nếu vị trí đầu đặt nữ thì vị trí 2 chỉ chọn 1 trong 2 nam). Vậy sẽ có $4 \cdot 2 = 8$ cách.
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Có thể vận dụng suy nghĩ của câu a cho câu c được không? HS: - Phát hiện: Yêu cầu nam, nữ xen kẽ thực chất là xếp 2 nam vào 1, 3 và 2 nữ vào 2, 4 hoặc ngược lại. - Giải quyết: Coi 2 nam như 1 cặp A, 2 nữ như 1 cặp B; Có 2 cách sắp xếp 2 cặp này là A chiếm 1, 3 còn B chiếm 2, 4 hoặc ngược lại. Trong mỗi cặp có 2 cách sắp xếp, vậy áp dụng quy tắc nhân có: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ cách.

	GV: Phát biểu bài toán tổng quát và nêu cách giải HS: Có n đôi nam nữ (A_1,B_1), (A_2,B_2),..., (A_n,B_n). Có bao nhiêu cách sắp xếp thành 1 hàng ngang để: a) Các đôi cạnh nhau? b) Đôi (A_1,B_1) cạnh nhau? c) Nam nữ xen kẽ. - Phát hiện và giải quyết: Cách giải dùng cách ghép cặp như bài trên.

2.4.4. Các bài toán về xác suất

Bài toán 8. Chiếc kim của bánh xe trong trò chơi "Chiếc nón kỳ diệu" có thể dừng lại ở 1 trong 7 vị trí với khả năng như nhau. Tính xác suất để trong 3 lần quay, chiếc kim của bánh xe đó dừng lại ở 3 vị trí khác nhau.

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	- HS chưa có một quy tắc mang tính thuật giải để giải quyết bài toán trên. Tuy nhiên HS đã biết khái niệm xác suất theo định nghĩa cổ điển... cho nên nó gợi nhu cầu nhận thức của HS và gây niềm tin có khả năng tự giải quyết.
Tìm giải pháp	GV: Phép thử trong bài toán là gi? Biến cố cần tính xác xuất là gì? HS: Phép thử "Kết quả của việc quay bánh xe ba lần liên tiếp" Biến cố "Trong ba lần quay liên tiếp chiếc kim của bánh xe dừng lại ở ba vị trí khác nhau" GV: Để tính xác suất ta cần làm gì? HS: Cần tính số phần tử của không gian mẫu và số phần tử của tập

	hợp mô tả biến cố. Số phần tử của không gian mẫu là số kết quả có thể xảy ra với 3 lần quay liên tiếp, mỗi lần quay có 7 kết quả suy ra áp dụng quy tắc nhân. Số phần tử của tập hợp mô tả biến cố chính là số kết quả 3 lần quay với 3 vị trí khác nhau.
Trình bầy giải pháp	Không gian mẫu là tập hợp các kết quả của 3 lần quay; do mỗi lần có 7 kết quả nên theo quy tắc nhân có $7^3 = 343$ kết quả. Biến cố "Trong ba lần quay liên tiếp chiếc kim của bánh xe dừng lại ở ba vị trí khác nhau". Vậy số phần tử của biến cố là $A_7^3 = 210$. Vậy xác suất cần tìm là $\frac{210}{343} = \frac{30}{49}$.
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Có thể áp dụng cách giải trên cho bài toán sau hay không ? Bài toán: Một người chọn ngẫu nhiên hai chiếc giày từ bốn đôi giày cỡ khác nhau. Tính xác xuất để hai chiếc được chọn tạo thành một đôi HS: Phát hiện: Phép thử "Chọn ngẫu nhiên hai chiếc giày từ bốn đôi giày cỡ khác nhau". Biến cố "Hai chiếc giày được chọn tạo thành một đôi". Như vậy có áp dụng công thức cổ điển của xác suất tương tự như trên để tính xác suất của biến cố. Giải pháp: Xác định số phần tử của không gian mẫu Xác định số phần tử của biên cố Tính xác suất theo công thức tương tự như bài trên *Lời giải*

	Không gian mẫu của phép thử là tập hợp kết quả của việc chọn ngẫu nhiên hai chiếc giày trong tám chiếc giày khác nhau, do đó số phần tử của không gian mẫu là $C_8^2 = 28$. Biến cố "Hai chiếc giày được chọn tạo thành một đôi", do ở đây chỉ có bốn đôi giày cỡ khác nhau, nên có 4 cách để lấy ra được hai chiếc giày tạo thành một đôi, vậy số phần tử của biến cố là 4. Vậy xác suất cần tìm $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$

Bài toán 9. Từ một hộp chứa sáu quả cầu trắng và bẩy quả cầu đen, lấy ngẫu nhiên đồng thời bốn quả. Tính xác suất sao cho:

a) Bốn quả lấy ra cùng mầu đen

b) Có ít nhất một quả mầu trắng

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	- HS chưa có một quy tắc mang tính thuật giải để giải quyết bài toán trên. Tuy nhiên HS đã biết khái niệm xác suất theo định nghĩa cổ điển, quy tắc cộng xác suất, quy tắc nhân xác suất, cho nên nó gợi nhu cầu nhận thức của HS và gây niềm tin có khả năng tự giải quyết.
Tìm giải pháp	GV: Phép thử trong bài toán là gì? Biến cố cần tính xác xuất là gì ? HS: Phép thử "lấy ngẫu nhiên đồng thời bốn quả cầu trong hộp có 10 quả cầu" Biến cố A: "Bốn quả lấy ra cùng mầu đen" Biến cố B: "Bốn quả lấy ra có ít nhất một quả mầu trắng" GV: Để tính xác suất của biến cố ta cần làm gì?

	HS: Cần tính số phần tử của không gian mẫu và số phần tử của tập hợp mô tả biến cố. GV: Cách tính số phần tử của không gian mẫu? Và số phần tử biến cố A? HS: Số phần tử của không gian mẫu chính bằng số cách lấy ngẫu nhiên bốn quả cầu trong hộp có mười quả cầu, suy ra áp dụng công thức tính số tổ hợp. Số phần tử của biến cố A chính bằng số cách lấy ngẫu nhiên bốn quả cầu đen trong trong số 7 quả cầu đen, suy ra áp dụng công thức tính số tổ hợp. Số phần tử của biến cố B … GV: Biến cố B: "Bốn quả lấy ra có ít nhất một quả mầu trắng". Vậy có những trường hợp nào về bốn quả được lấy ra? HS: Những trường hợp thuận lợi cho biến cố B: Trường hợp 1: Có 1 quả trắng, 3 quả đen Trường hợp 2: Có 2 quả trắng, 2 quả đen Trường hợp 3: Có 3 quả trắng, 1 quả đen Trường hợp 4: Cả bốn quả được lấy ra đều mầu trắng GV: Cách xác định số phần tử của biến cố B? HS: Tính số cách chọn của từng trường hợp trên và lấy tổng số cách trọn trong cả bốn trường hợp. GV: Một cách khác để tìm số phần tử của biến cố B là ta xét xem mối quan hệ giữa biến cố B và biến cố A? HS: Nhận thấy A và B là hai biến cố xung khắc nên: $$n(B) = n(\Omega) - n(A)$$
Trình bầy	Không gian mẫu là tập hợp các kết quả của việc lấy ngẫu nhiên bốn quả cầu trong hộp chứa 13 quả cầu, do đó số phần tử của

giải pháp	không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{13}^4 = 715$ Biến cố A: "Bốn quả lấy ra cùng mầu đen" Biến cố B: "Bốn quả lấy ra có ít nhất một quả mầu trắng" Do trong hộp có bảy quả cầu mầu đen nên số phần tử của biến cố A là $n(A) = C_7^4 = 35$ Do biến cố A và B là hai biến cố xung khắc nên: $n(B) = n(\Omega) - n(A) = 715 - 35 = 680$ Vậy xác suất các biến cố là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{35}{715} = \frac{7}{143}$; $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{680}{715} = \frac{136}{143}$
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Có thể tính xác xuất của biến cố B theo cách nào khác hay không? HS: Phát hiện thấy biên cố $A \cap B = \varnothing$; $A \cup B = \Omega$ nên có thể áp dụng công thức xác xuất của biên cố đối $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{143} = \frac{136}{143}$ GV: Như vậy trong nhiều bài toán, để tính xác xuất của một biến cố ta có thể tính gián tiếp thông qua biến cố xung khắc của biến cố đó bằng việc vận dụng công thức cộng xác xuất sẽ cho lời giải đơn giản hơn.

Bài toán 10. Xác suất bắn trúng hồng tâm của một người bắn cung trong mỗi lần bắn là 0,2. Tính xác suất để trong 3 lần bắn độc lập:

a) Đều trúng hồng tâm

b) Người đó bắn trúng hồng tâm đúng 1 lần

c) Người đó bắn trúng hồng tâm ít nhất 1 lần

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	*Đây là một tình huống gợi vấn đề vì:* HS chưa có một quy tắc mang tính thuật giải để giải quyết bài toán trên. Tuy nhiên HS đã biết khái niệm xác suất theo định nghĩa cổ điển và các quy tắc tính xác xuất... cho nên nó gợi nhu cầu nhận thức của HS và gây niềm tin có khả năng tự giải quyết.
Tìm giải pháp	*Hướng dẫn tìm giải pháp phần a.* GV: Đề bài cho những gì và yêu cầu những gì? HS: Cho xác suất của mỗi lần bắn trúng 1,2,3. Yêu cầu tính xác suất để trúng cả 3 lần. GV: Ở đây có những biến cố nào đã biết xác suất và cần tính xác suất của biến cố nào? HS: Biến cố: A_1:“Lần bắn thứ nhất trúng” A_2: “Lần bắn thứ hai trúng” A_3: “Lần bắn thứ ba trúng” Các biến cố đều có xác suất là 0,2. Cần tính xác xuất của biến cố A “Trúng cả ba lần”. GV: Có liên hệ nào giữa các biến cố trên không? HS: Phát hiện: Biến cố A là tích của ba biến cố A_1, A_2, A_3 và ba biến cố A_1, A_2, A_3 là các biến cố độc lập. Giải quyết: Áp dụng quy tắc nhân xác suất. *Hướng dẫn tìm giải pháp phần b.* b) GV: Biến cố B: “Trúng đúng một lần” có liên quan đến biến cố nào không? HS:...

GV: Trúng đúng một lần tức là thế nào?

HS: Trúng đúng một lần tức là chỉ trúng lần thứ nhất xẩy hai lần thứ hai và thứ ba; hoặc trúng lần thứ hai xẩy lần thứ nhất và thứ ba; hoặc trúng lần thứ ba xẩy lần thứ nhất và thứ hai.

GV: Nếu gọi biến cố B_1 : "Chỉ trúng lần 1 xẩy 2 lần 2 và 3"

B_2 : "Chỉ trúng lần 2 xẩy 2 lần 1 và 3"

B_3 : "Chỉ trúng lần 3 xẩy 2 lần 1 và 2"

thì có nhận xét gì về mối quan hệ giữa B_1, B_2, B_3, và B ?

HS: $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Mà B_1, B_2, B_3 đôi một xung khắc nên $P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$

GV: Vậy vấn đề ở đây là có tính được xác suất của B_1 không? B_1 có liên quan đến các biến cố nào?

HS: Phát hiện: B_1: "Trúng lần 1 xẩy lần 2, 3"; do đó $B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. Nhận thấy 3 biến cố $A_1, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ độc lập. Áp dụng công thức nhân xác suất để tính xác suất B_1.

Hướng dẫn tìm giải pháp phần c.

GV: Đã có hướng giải chưa?

HS: Tương tự các ý trên tách biến cố bắn trúng ít nhất 1 lần thành 3 biến cố đôi một xung khắc là: "Bắn trúng đúng 1 lần"; "Bắn trúng đúng 2 lần"; "Bắn trúng đúng 3 lần". Tính từng biến cố trên (phân tích thành các biến cố độc lập...)

GV: Cách giải trên khá dài dòng và phức tạp. Có một hướng khác là tính thông qua biến cố đối.

HS: Phát hiện được biến cố đối của biến cố C: "Bắn trúng ít nhất một lần" là biến cố $\overline{C}$: "Cả ba lần đều trượt"

	$\overline{C} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} \Rightarrow P(C) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})$
Trình bầy giải pháp	a) Gọi A là biến cố "Ba lần bắn trúng hồng tâm"; A_i là biến cố "Lần thứ i bắn trúng" (với i = 1,2,3). Thì $A=A_1A_2A_3$. Mà A_1, A_2, A_3 độc lập. Vậy $P(A) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0,2\cdot 0,2\cdot 0,2 = 0,008$ b) Gọi B là biến cố "Chỉ bắn trúng đúng một lần" B_i là biên cố "Bắn trúng đúng lần thứ i" (với i = 1,2,3). Ta có: $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$. Mặt khác các biến cố B_1, B_2, B_3 đôi một xung khắc nên: $P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$ $B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \Rightarrow P(B_1) = P(A_1).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3})$ $= 0,2.(1-0,2).(1-0,2) = 0,128$ Tương tự tính được $P(B_2) = P(B_3) = 0,128$ Vậy: $P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 3\cdot 0,128 = 0,384$ là xác suất người đó chỉ bắn trúng đúng một lần. c) Phát hiện được biến cố đối của biến cố C: "Bắn trúng ít nhất một lần" là biến cố $\overline{C}$: "Cả ba lần bắn đều trượt" $\overline{C} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ $\Rightarrow P(\overline{C}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 0,8^3 = \dfrac{64}{125}$ Vậy $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = \dfrac{61}{125}$
Nghiên cứu sâu giải pháp	Trong nhiều trường hợp, để tính xác suất của một biến cố ta phải tách nó ra thành nhiều biến cố đơn giản hơn để áp dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân xác suất. Ngoài ra cũng có thể tính xác suất của một biến cố thông qua biến cố đối của nó.

Một số ví dụ về dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề vào tìm sai lầm và sửa chữa khi giải toán về tổ hợp và xác suất.

Bài toán 11. Một tổ có 12 HS nữ và 10 HS nam. Cần chọn 6 HS (3 nam, 3 nữ) để ghép thành 3 đôi, mỗi đôi gồm một nam và một nữ để biểu diễn văn nghệ. Hỏi có bao nhiêu cách ghép.

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	GV: Có ba lời giải như sau: *Lời giải 1* Số cách chọn 3 nữ trong 12 nữ là A_{12}^3 cách) Số cách chọn 3 nam trong 10 nam là A_{10}^3 (cách) Vậy số cách chọn 3 đôi nam nữ là: $A_{12}^3 \cdot A_{10}^3$ (cách) *Lời giải 2* Số cách chọn 3 nữ trong 12 nữ là C_{12}^3 (cách) Số cách chọn 3 nam trong 10 nam là C_{10}^3 (cách) Vậy số cách chọn 3 đôi nam nữ là: $C_{12}^3 \cdot C_{10}^3$ (cách) *Lời giải 3* Số cách chọn 3 nữ trong 12 nữ là C_{12}^3 (cách) Số cách chọn 3 nam trong 10 nam là C_{10}^3 (cách) Do đó số cách chọn 6 HS (3 nam, 3 nữ) là: $C_{12}^3 \cdot C_{10}^3$ (cách) Trong 6 HS chọn ra thì có có 3 nam và 3 nữ, sau đó ta hoán đổi vị trí cho 3 nam và 3 nữ. Vậy số cách chọn thoả mãn là: $3!\cdot 3!\cdot C_{12}^3 \cdot C_{10}^3$ (cách) *? Hãy tìm nguyên nhân sai lầm trong các lời giải trên.*

Tìm giải pháp	HS: Phát hiện các vấn đề chưa đúng của các lời giải trên. Lời giải 1: Rõ ràng là sai vì bài toán không yêu cầu thứ tự. Lới giải 2: Thiếu số cách chọn để ghép thành đôi. Lời giải 3: Có nhầm lẫn trong việc hoán đổi cả 3 nam và 3 nữ nên sẽ xảy ra trùng lặp lại các cặp nhảy. Ví dụ: có 3 bạn Nam: A, B, C và 3 bạn nữ: a, b, c thì một trong những cách ghép là Aa; Bb; Cc. Xét một hoán vị khác của 3 nam C, A, B và 3 nữ c, a, b thì vẫn có cách ghép trùng với cách ban đầu Aa, Bb, Cc GV: Giả sử đã chọn được ba em nam là A, B, C và 3 bạn nữ: a, b, c thì từ 6 em HS trên sẽ có bao nhiêu cách ghép thành ba đôi, mỗi đôi gồm 1 nam và một nữ ? HS: Phát hiện được các sai lầm của các lời giải trên từ đó nhận thấy mỗi hoán vị của ba em nam hoặc ba em nữ thì tương ứng với một cách ghép đôi cho 6 em HS trên.
Trình bầy giải pháp	*Lời giải đúng* Số cách chọn 3 nữ trong 12 nữ là C_{12}^{3} (cách) Số cách chọn 3 nam trong 10 nam là C_{10}^{3} (cách) Do đó số cách chọn 6 HS (3 nam, 3 nữ) là: $C_{12}^{3}\cdot C_{10}^{3}$ (cách) Trong 6 HS chọn ra thì có 3! (cách) ghép giữa các đôi nhảy với nhau (là hoán vị của 3 HS nam hoặc 3 HS nữ) Vậy số cách chọn thoả mãn là: $3!\cdot C_{12}^{3}\cdot C_{10}^{3}=158400$ (cách)
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Tìm lời giải cho bài toán sau: Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư ấy lên 3 bì thư đã chọn. Một bì thư chỉ dán 1 tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy?

	HS: Phát hiện bài toán này có nội dung gần tương tự như bài toán đã giải ở trên, từ đó dễ dàng đưa ra cách thức giải quyết bài toán: *Lời giải* Số cách chọn 3 tem thư trong 5 tem thư khác nhau là C_5^3 (cách) Số cách chọn 3 bì thư trong 6 bì thư khác nhau là C_6^3(cách) Do đó số cách chọn ra một bộ gồm 3 tem thư và 3 bì thư khác nhau là: $C_5^3 \cdot C_6^3$ (cách). Có 3! (cách) dán 3 tem thư vào 3 bì thư . Vậy số cách chọn ra 3 tem thư và 3 bì thư rồi dán ba tem thư đó vào lần lượt ba bì thư là $3!\cdot C_5^3 \cdot C_6^3 = 1200$ (cách)

Bài toán 12. Một tổ có tám học sinh nam, bẩy học sinh nữ. Chọn ra một nhóm gồm sáu học sinh sao cho có ít nhất hai học sinh nữ thì có bao nhiêu cách chọn?

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	GV: Một HS có lời giải như sau: Bước 1: Chọn ra 2 nữ (vì có ít nhất 2 nữ) có: C_7^2 (cách) Bước 2: Chọn 4 bạn còn lại trong 13 bạn có: C_{13}^4 (cách) Khi đó 6 bạn được chọn luôn thoả mãn có ít nhất 2 nữ. Vậy có $C_7^2 \cdot C_{13}^4 = 15015$ (cách) *? Hãy tìm nguyên nhân sai lầm trong lời giải trên.*
Tìm giải	HS: … GV: Đưa ra sơ đồ minh hoạ cho lời giải:

pháp	Nếu: 8 nam có tên lần lượt: A, B, C, D, E, F, G, H 7 nữ có tên lần lượt: K, L, M, N, O, P, Q + Giả sử nếu chọn ra 2 nữ là K, L và chọn 4 người còn lại bất kì trong 13 người còn lại là: A, B, M, N. + Lần sau chọn 2 nữ là M, N thì chọn 4 người còn lại bất kì trong 13 người còn lại là: A, B, K, L *Vậy dấu hiệu sai lầm ở đây là gì?* HS: Dấu hiệu HS sai lầm là: có 1 lần chọn sau sẽ trùng với lần chọn trước với 6 người: K, L, A, B, M, N. Sai lầm là học sinh đã phân biệt thứ tự vì chọn liên tiếp GV: Trong 6 em được chọn có ít nhất 2 em nữ, vậy có những khả năng nào về thành phần nam và nữ trong 6 em được chọn ? HS: Phát hiện có 5 trường hợp Trường hợp 1: 2 nữ, 4 nam. Trường hợp 2: 3 nữ, 3 nam. Trường hợp 3: 4 nữ, 2 nam. Trường hợp 4: 5 nữ, 1 nam. Trường hợp 5: 6 nữ. Vậy để tính số cách chọn ra 6 em trong đó có ít nhất hai em nữ, ta đi tính số cách chọn trong mỗi trường hợp rồi cộng lại
Trình bầy giải pháp	*Lời giải* Chia cụ thể các trường hợp: Trường hợp 1: Chọn 2 nữ, 4 nam: $C_7^2 \cdot C_8^4$ (cách) Trường hợp 2: Chọn 3 nữ, 3 nam: $C_7^3 \cdot C_8^3$ (cách) Trường hợp 3: Chọn 4 nữ, 2 nam: $C_7^4 \cdot C_8^2$ (cách) Trường hợp 4: Chọn 5 nữ, 1 nam: $C_7^5 \cdot C_8^1$ (cách)

	Trường hợp 5: Chọn 6 nữ: C_7^6 (cách) Vậy có tất cả: $$C_7^2 \cdot C_8^4 + C_7^3 \cdot C_8^3 + C_7^4 \cdot C_8^2 + C_7^5 \cdot C_8^1 + C_7^6 = 4585 \text{ (cách)}$$
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV**:** Cách giải trên là ta đi tiến hành tính trực tiếp số cách chọn ra 6 em HS trong đó có ít nhất hai em nữ. Một cách khác là ta đi xác định tổng số cách chọn 6 em bất kỳ trừ đi số cách chọn 6 em mà không thỏa mãn yêu cầu như trên của bài toán. Hãy thực hiện giải bài toán theo hướng này? HS: Thực hiện lời giải Bước 1: chọn 6 HS bát kì: C_{15}^6 (cách) Bước 2: chọn 5 HS nam, 1 HS nữ: $C_8^5 \cdot C_7^1$ (cách) Bước 3: chọn 6 HS nam: C_8^6 (cách) Vậy số cách chọn thoã mãn là: $$C_{15}^6 - \left(C_8^5 \cdot C_7^1 + C_8^6\right) = 4585 \text{ (cách)}$$ GV: Bài tập tương tự: Cho 10 quả cầu màu trắng có bán kính khác nhau và 15 quả cầu màu xanh có bán kính khác nhau. Người ta muốn chọn 5 quả cầu sao cho có ít nhất 2 quả cầu trắng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 quả cầu trên. HS: Thực hiện lời giải…

Bài toán 13. Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu hỏi dễ, 7 câu hỏi trung bình và 4 hỏi câu khó. Người ta chọn ra 7 câu hỏi để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại câu hỏi dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra?

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	GV: Một HS có lời giải như sau: Bước 1: Chọn 7 câu tuỳ ý trong 20 câu có C_{20}^{7} (cách) Bước 2: Chọn 7 câu không thoả mãn đầu bài TH1: Chọn 7 câu trong 16 câu dễ và trung bình có C_{16}^{7} (cách) TH2: Chọn 7 câu trong 13 câu dễ và khó có C_{13}^{7} (cách) TH3: Chọn 7 câu trong 11 câu trung bình và khó có C_{11}^{7} (cách) Vậy có: $C_{20}^{7}-\left(C_{16}^{7}+C_{13}^{7}+C_{11}^{7}\right)=64034$ đề kiểm tra *? Hãy tìm nguyên nhân sai lầm trong lời giải trên.*
Tìm giải pháp	HS: ... GV: Ở đây các em cần lưu ý là số lượng câu hỏi dễ hoặc câu hỏi trung bình đều lớn hơn hoặc bằng số lượng câu hỏi được chọn ra, vậy có xảy ra trùng lặp gì không trong số cách chọn câu hỏi của các trường hợp trên. HS: Phát hiện nếu 7 câu hỏi được chọn ra mà đều là câu hỏi dễ thì sẽ thỏa mãn cả trường hợp 1 lẫn trường hợp 2, còn bẩy câu hỏi được chọn ra mà đều là câu hỏi trung bình thì sẽ thỏa mãn cả trường hợp 1 lẫn trường hợp 3. Do vậy số cách chọn ra bảy câu hỏi không thỏa mãn đầu bài theo cách như trên sẽ bị nhiều hơn đáp án đúng. Sai lầm ở chỗ là loại trừ không hết các điều kiện không thoả mãn bài toán.
Trình bầy giải	*Lời giải đúng* Bước 1: chọn 7 câu tuỳ ý trong 20 câu có C_{20}^{7} (cách)

pháp	Bước 2: chọn 7 câu không thoả mãn đầu bài (có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó). TH1: chọn 7 câu dễ trong 9 câu dễ có C_9^7 (cách) TH2: chọn 7 câu trung bình trong 7 câu trung bình có 1 (cách) TH3: chọn 7 câu dễ và trung bình trong 16 câu có C_{16}^7 (cách) TH4: chọn 7 câu dễ và khó trong 13 câu có C_{13}^7 (cách) TH5: chọn 7 câu trung bình và khó trong 11 câu có C_{11}^7 (cách) Vậy có: $C_{20}^7-\left(C_{16}^7+C_{13}^7+C_{11}^7-1-C_9^7\right)=64071$ đề kiểm tra
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Hãy giải bài toán sau: Từ một hộp đựng 7 viên bi đỏ, 6 viên bi trắng, 5 viên bi vàng (các viên bi kích thước đôi một khác nhau). Người ta chọn ra 10 viên bi sao cho phải có đủ cả 3 màu. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? HS: Phát hiện nội dung bài toán gần tương tự như bài toán đã giải ở trên, và phát hiện ra số lượng bi mỗi loại mầu đều nhỏ hơn số lượng viên bi cần lấy ra, nên không thể xảy ra trường hợp 10 viên bi lấy ra có cùng mầu. Từ đó HS đưa ra cách thức giải bài toán như sau: Bước 1: chọn 10 viên bi tuỳ ý trong số 18 viên bi khác nhau có C_{18}^{10} (cách) Bước 2: chọn 10 viên bi không thoả mãn đầu bài TH1: chọn 10 viên bi trong 13 viên mầu đỏ và trắng có C_{13}^{10} (cách) TH2: chọn 10 viên bi trong 11 viên bi trắng và vàng có C_{11}^{10} (cách) TH3: chọn 10 viên bi trong 12 viên bi mầu đỏ và vàng có C_{13}^{10} (cách). Vậy có: $C_{18}^7-\left(C_{13}^{10}+C_{11}^{10}+C_{12}^{10}\right)=31461$ cách chọn ngẫu nhiên 10 viên bi thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài toán 14. Có bốn tấm bìa được đánh số từ 1 đến 4. Rút ngẫu nhiên ba tấm bìa. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: " Tổng các số trên ba tấm bìa bằng 8 "

B: " Các số trên ba tấm bìa là ba số tự nhiên liên tiếp "

<table>
<tr><td>Lý luận PH GQVĐ</td><td>Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể</td></tr>
<tr><td>Phát hiện và thâm nhập vấn đề</td><td>GV: Một HS có lời giải như sau:
Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = A_4^3 = 24$
Kí hiệu (i, j,k) | $i, j, k = 1, 2, 3, 4$ và i, j, k đôi một khác nhau, là kết quả lần rút đầu tiên được tấm số i, lần rút thứ hai được tấm số j, lần rút thứ 3 được tấm số k. Ta có:
$A = \{(1,3,4), (1,4,3), (3,1,4), (3,4,1), (4,3,1), (4,1,3)\}$
$\Rightarrow n(A) = 6$
$\Rightarrow P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
$B = \{ (123), (234) \} \Rightarrow n(B) = 2 \Rightarrow P(B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$
? Hãy tìm nguyên nhân sai lầm trong lời giải trên.</td></tr>
<tr><td>Tìm giải pháp</td><td>HS: Phát hiện cách rút các tấm bìa trong bài giải ở trên là có sự phân biệt thứ tự rút, dẫn đến đã tính sai số phần tử của không gian mẫu và số phần tử có lợi cho biến cố dẫn đến tính sai xác suất của các biến cố A và B.
GV: Đúng vậy, ở đây chúng ta phải hiểu là rút ngẫu nhiên ba tấm bìa là cách rút ba tấm bìa mà không phân biệt thứ tự rút, điều này khác với việc rút liên tiếp ba tấm bìa.
GV: Vậy lời giải đúng cho bài toán?</td></tr>
</table>

Trình bầy giải pháp	*Lời giải đúng:* Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_4^3 = 4$ A: " Tổng các số trên ba tấm bìa bằng 8 " suy ra ba tấm bìa được rút ra mang các số 1, 3, 4 $\Rightarrow$ $n(A) = 1$. Vậy nên ta tính được $P(A) = \frac{1}{4}$ B: " Các số trên ba tấm bìa là ba số tự nhiên liên tiếp " suy ra ba tấm bìa được rút ra mang các số 1, 2, 3 hoặc 2, 3, 4. Nên ta có $n(B) = 2$. Vậy $P(B) = \frac{1}{2}$
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Giải bài toán sau: Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con, rút ngẫu nhiên cùng một lúc bốn con. Tính xác suất các biến cố sau: A: "Cả bốn con đều là át" B: "Không có con át nào" HS: Phát hiện phép thử "rút ngẫu nhiên cùng một lúc bốn con bài trong bộ bài 52 con" như vậy việc rút bài ở đây là không phân biệt thứ tự, từ đó hiểu đúng được không gian mẫu của phép thử và đưa ra cách giải đúng cho bài toán. *Lời giải* Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{52}^4 = 270725$ A: "Cả bốn con đều là át" $\Rightarrow n(A) = 1$. Nên $P(A) = \frac{1}{270725}$ B: "Không có con át nào" suy ra bốn con bài được rút ra từ 48 con bài còn lại trong bộ bài 52 con mà bỏ đi các con át $\Rightarrow n(B) = C_{48}^4 = 194580$. Nên $P(B) = \frac{194580}{270725}$

Bài toán 15. Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối và đồng chất liên tiếp hai lần. Tính xác suất của biến cố “tổng số chấm xuất hiện trên mặt của con xúc xắc trong hai lần gieo là 8”.

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	*Một HS có lời giải như sau:* Tổng các số chấm xuất hiện trên mặt của con xúc xắc trong hai lần gieo chỉ có thể là 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 nên không gian mẫu của phép thử này gồm 11 kết quả đồng khả năng. Trong đó chỉ có 1 kết quả cho tổng là 8 nên xác xuất của biến cố này là $\frac{1}{11}$. *? Hãy tìm nguyên nhân sai lầm trong lời giải trên.*
Tìm giải pháp	GV: không gian mẫu là gì? HS: không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử. GV: Vậy các kết quả có thể có của phép thử trong bài toán này là gì? HS: Kết quả của phép thử ở đây là con xúc sắc trong lần gieo đầu tiên xuất hiện mặt mấy chấm, trong lần gieo thứ hai xuất hiện mặt mấy chấm. GV: vậy các em có phát hiện ra lời giải của bài toán này sai ở chỗ nào chưa? HS: Lời giải trên sai về số phần tử của không gian mẫu, và số phần tử của biến cố của phép thử. GV: Yêu cầu HS sửa lại lời giải cho đúng.

Trình bầy giải pháp	*Lời giải đúng* Có 6 khả năng xảy ra đối với con súc sắc trong lần gieo thứ nhất và 6 khả năng xảy ra đối với con súc xắc trong lần gieo thứ hai do đó không gian mẫu của phép thử này có 36 phần tử. Biến cố "tổng số chấm xuất hiện trên mặt của con xúc xắc trong hai lần gieo là 8" có số kết quả thuận lợi cho biến cố này là 5 nên xác suất của biến có này là $\frac{5}{36}$.
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Như vậy trong giải các bài toán về tính xác suất của một biến cố thì điều rất quan trọng là chúng ta phải hiểu đúng phép thử, và biến cố trong bài toán và điều đó sẽ giúp ta có giải pháp đúng trong việc xác định số phần tử của không gian mẫu và số phần tử của biến cố liên quan đến phép thử

Bài toán 16. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất liên tiếp hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: " Lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt 6 chấm "

B: " Lần gieo thứ hai xuất hiện mặt 6 chấm "

C: " Ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm "

Lý luận PH GQVĐ	Thực tế thực hiện trên nội dung cụ thể
Phát hiện và thâm nhập vấn đề	GV: Một HS có lời giải như sau: Không gian mẫu của phép thử $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ có $n(\Omega) = 36$ $A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}, n(A) = 6.$

	Nên $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}, n(B) = 6.$ Nên $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ Ta thấy $C = A \cup B$ cho nên theo công thức cộng xác suất ta có $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ *GV: Hãy tìm nguyên nhân sai lầm trong lời giải trên?*
Tìm giải pháp	GV: Hai biến cố A và B có phải là hai biến cố xung khắc không? HS: Phát hiện hai biến cố A và B trong bài toán không phải là hai biến cố xung khắc vì $A \cap B = \{(6, 6)\}$. GV: Vậy sai lầm của lời giải trên là ở đâu ? HS: Phát hiện lời giải trên sai ở chỗ là hai biến cố A và B không phải là hai biến cố xung khắc nên không thể áp dụng công thức cộng xác suất $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ GV: Có thể liệt kê các phần tử của biến cố C được không ? HS: Phát hiện có thể liệt kê được các phần tử của biến cố C và từ đó hình thành giải pháp tính xác xuất của biến cố C $C = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$
Trình bầy giải pháp	*Lời giải đúng* Không gian mẫu của phép thử: $\Omega = \{(i, j) \mid i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, có $n(\Omega) = 36$ $A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ $\Rightarrow n(A) = 6.$

	$B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}$ $\Rightarrow n(B) = 6.$ Nên $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $C = \{(1,6), (2,6),(3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}.$ Nên $P(C) = \frac{11}{36}$
Nghiên cứu sâu giải pháp	GV: Như vậy khi tính xác xuất dựa theo công thức cộng xác xuất thì ta phải đặc biệt lưu ý điền kiện để vận dụng công thức. GV: Có cách nào khác để xác định số phần tử của biến cố C trong bài toán trên ? HS: Phát hiện có thể tính số phần tử biến cố C theo các cách sau Cách 1: vì $C = A \cup B$ nên $n(C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ Cách 2: Biên cố $\overline{C}$: "Mặt 6 chấm không xuất hiện trong hai lần gieo", áp dụng quy tắc nhân ta có $n(\overline{C}) = 25$ $\Rightarrow n(C) = n(\Omega) - n(\overline{C})$

2.5. Kết luận chương 2

Trong chương này chúng tôi đã nêu ra một số cách tạo câu hỏi vấn đáp gợi vấn đề thường gặp và vận dụng phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề vào dạy học khái niệm, định lí, qui tắc và phương pháp, giải bài tập, tìm sai lầm và sửa chữa sai lầm trong giải toán. Ở mỗi nội dung này chúng tôi đề ra các biện pháp dạy học sau đó vận dụng tình huống cụ thể. Chúng tôi cố gắng lựa chọn các ví dụ mẫu đa dạng, đơn giản, dễ hiểu, dễ thực hiện, phù hợp hầu hết với đối tượng HS hiện nay.

Chương 3. THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

3.1. Mục đích và nhiệm vụ thực nghiệm

3.1.1. Mục đích của thực nghiệm sư phạm

Mục đích của thực nghiệm sư phạm là thăm dò tính khả thi và tính hiệu quả của việc vận dụng phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề vào dạy học chương "Tổ hợp và xác suất" ở lớp 11 THPT.

3.1.2. Nhiệm vụ của thực nghiệm

- Biên soạn tài liệu thực nghiệm theo hướng DH phát hiện và GQVĐ cho HS.

- Hướng dẫn sử dụng tài liệu cho GV.

- Đánh giá chất lượng, hiệu quả và hướng khả thi của việc vận dụng DH trên.

3.2. Nội dung thực nghiệm

Kế hoạch thực nghiệm

- Biên soạn tài liệu thực nghiệm.

- Tổ chức dạy các tiết đã chọn tại hai lớp thực nghiệm và đối chứng.

- Đánh giá kết quả của đợt thực nghiệm.

+ Thời gian thực nghiệm sư phạm: Từ 21/10/2016 đến 21/11/2016.

+ Địa điểm thực nghiệm: Trường THPT Gia Phù, Phù Yên, Sơn La

+ Đối tượng thực nghiệm:

Để đảm bảo tính phổ biến của mẫu tôi chọn hai lớp có học lực môn Toán từ trung bình khá trở lên, có sĩ số và học lực tương đương.

Nội dung thực nghiệm là dạy học chương tổ hợp và xác suất.

- Bài kiểm tra 45 phút với nội dung như sau:

ĐỀ BÀI

Câu 1: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi:

a. Có bao nhiêu số có 5 chữ số đôi một khác nhau.

b. Có bao nhiêu số có 4 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5.

c. Có bao nhiêu số có 3 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 540.

Câu 2: Cho trong khai triển $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{2016}$

a. Tìm hệ số chứa x^{2019} trong khai triển trên

b. Tính tổng các hệ số của khai triển trên.

Câu 3: Một hộp đựng 50 viên bi được đánh số thứ tự từ 1 đến 50, trong đó có 10 viên bi đỏ, 25viên bi xanh, 6 viên bi trắng và 9 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để:

a. 4 viên bi được chọn cùng màu.

b. 4 viên bi được chọn có màu đôi một khác nhau.

c. 4 viên bi được chọn có ít nhất một viên bi đỏ.

Câu 4: Giải các phương trình:

a. $3A_n^2 - A_{2n}^2 + 42 = 0.$

b. $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1} = 2^9$

ĐÁP ÁN

<table>
<tr><th>Thành phần</th><th></th><th>Nội dung đáp án</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="11">Câu 1</td><td rowspan="3">a</td><td>Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$. Khi đó:
a có 7 cách chọn.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>các số còn lại có A_7^4 cách chọn.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>vậy có tất cả là: 7. A_7^4 =5880 (số)</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">b</td><td>Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$. Khi đó:
TH1: $d = 0 \Rightarrow d$ có 1 cách . Các số còn lại có: A_7^3
$\Rightarrow$ có $A_7^3 = 210$ (số)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>TH 2: $d = 5 \Rightarrow$ d có 1 cách, a có 6 cách, các số còn lại có: A_6^2 cách.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$\Rightarrow$ có 1.6. $A_6^2 = 180$ (số)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vậy có tất cả là: 210 + 180 = 390 (số)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="3">c</td><td>Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$. Khi đó:
TH 1: $a < 5 \Rightarrow a$ có 4 cách chọn $(a \neq 0)$.
Các số còn lại có: A_7^3
$\Rightarrow 4.$ $A_7^2 = 168$ (số)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>TH 2: $a = 5$, $b < 4 \Rightarrow b$ có 4 cách, c có 6 cách.
$\Rightarrow 4.6 = 24$ (số)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vậy có tất cả là $168 + 24 = 192$ (số).</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Câu 2</td><td rowspan="2">a</td><td>Số hạng tổng quát là:
$$C_{2016}^k\left(x^2\right)^{2016-k}\left(-\frac{1}{2x}\right)^k = C_{2016}^k\left(\frac{-1}{2}\right)^k x^{4032-3k}$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Số hạng chứa x^{2017} khi</td><td></td></tr>
</table>

		$4032 - 3k = 2019 \Leftrightarrow k = 671$	0,25
		Vậy hệ số chứa x^{2019} là $-\dfrac{C_{2016}^{671}}{2^{671}}$	0,25
	b	Ta có: $\left(x^2 - \dfrac{1}{2x}\right)^{2016} = \sum\limits_{k=0}^{2016} C_{2016}^{k}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k} x^{4032-3k}$. Khi đó tổng các hệ số của khai triển là: $\sum\limits_{k=0}^{2016} C_{2016}^{k}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k} = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{2016} = \dfrac{1}{2^{2016}}$	0,5 0.5
Câu 3	a	Ta có: $n(\Omega) = C_{50}^{4}$ Gọi A là biến cố: “4 viên bi lấy ra cùng màu”. Khi đó: $n(A) = C_{10}^{4} + C_{25}^{4} + C_{6}^{4} + C_{9}^{4} = 13001$	0,5
		$P(A) = \dfrac{13001}{C_{50}^{4}} \approx 0,056$	0,5
	b	Gọi B là biến cố: “4 viên bi lấy ra có bốn màu khác nhau”. Khi đó: $n(B) = C_{10}^{1}.C_{25}^{1}.C_{6}^{1}.C_{9}^{1} = 13500$	0,5
		$P(B) = \dfrac{13500}{C_{50}^{4}} \approx 0,0586$	0,5
	c	Gọi C là biến cố: “4 viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu đỏ”. Khi đó, $\overline{C}$ là biến cố: “4 viên bi lấy ra không có viên bi màu đỏ”.	0,25
		$\Rightarrow n(C) = C_{30}^{4} \Rightarrow P\left(\overline{C}\right) = \dfrac{C_{30}^{4}}{C_{50}^{4}} \approx 0,119$	0,5
		$\Rightarrow P(C) = 1 - P\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,119 = 0,881$	0,25

Câu 4	a	Điều kiện: $\begin{cases} n \geq 2 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$	0,25
		$\text{Pt} \Leftrightarrow 3\dfrac{n!}{(n-2)!} - \dfrac{(2n)!}{(2n-2)!} + 42 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow 3n(n-1) - 2n(2n-1) + 42 = 0$ $\Leftrightarrow -n^2 - n + 42 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -7 \\ n = 6 \end{array}\right.$ Vậy nghiệm của phương trình là n = 6	0,25
	b	Điều kiện: $\begin{cases} n \geq 1 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$	0,25
		$(1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$ $(1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + \cdots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$	0,25
		$\Rightarrow 2^{2n} = 2\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}\right)$ $\Rightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$	0,25
		$\Rightarrow 2^{2n-1} = 2^9 \Leftrightarrow n = 5$ Vậy nghiệm của phương trình là n = 5	0,25

3.3. Phương pháp thực nghiệm

Chúng tôi hướng dẫn GV (tham gia thực nghiệm) sử dụng tài liệu để soạn giáo án và thực hiện các bước lên lớp đối với bài dạy trong chương "Tổ hợp và xác suất" ở lớp 11 THPT theo phương án đã trình bày trong chương 2 của luận văn. Thực nghiệm sư phạm được thực hiện song song giữa lớp thực nghiệm và lớp đối chứng. Lớp thực nghiệm và lớp đối chứng do cùng một GV dạy theo giáo án do chúng tôi thiết kế và hướng dẫn ở lớp thực nghiệm; dạy giáo án bình thường do GV tự soạn ở lớp đối chứng.

Để lựa chọn mẫu thực nghiệm sát đối tượng HS chúng tôi tiến hành thực hiện:

- Trao đổi với GV bộ môn Toán, GV chủ nhiệm lớp để biết tình hình học tập của HS.

- Trao đổi với HS để tìm hiểu năng lực học tập, mức độ hứng thú của các em, đối với nội dung tổ hợp và xác suất.

- Dự giờ của các GV dạy chương tổ hợp và xác xuất.

- Kết hợp sử dụng phương pháp quan sát và tổng kết kinh nghiệm.

Sau mỗi tiết học chúng tôi trao đổi với GV và HS để rút kinh nghiệm. Có sự điều chỉnh cho phù hợp với giáo án do chúng tôi soạn thảo, hoặc điều chỉnh, bổ sung nhằm nâng cao chất lượng giảng dạy.

3.4. Kết quả thực nghiệm sư phạm

3.4.1. Cơ sở để đánh giá kết quả của thực nghiệm sư phạm

Dựa vào các nhận xét, ý kiến đóng góp của GV tham gia thực nghiệm sư phạm và kết quả bài kiểm tra:

Bảng thống kê

Lớp	Tổng số HS	Kết quả bài kiểm tra 45 phút										Ghi chú
		Điểm giỏi		Điểm khá		Điểm TB		Điểm yếu		Điểm kém		
		TS	%	TS	%	TS	%	TS	%	TS	%	
11A1	44	5	11,4	8	18,2	20	45,5	10	24,9	0	0,0	(Thực nghiệm)
11A5	45	3	6,7	7	15,6	22	48,9	12	28,8	0	0,0	(Đối chứng)

3.4.2. Kết quả của thực nghiệm sư phạm

Các nhận xét của các GV đã được tổng hợp lại thành các ý kiến chủ yếu sau đây:

- Các tình huống gợi vấn đề được xây dựng trong luận văn đã góp phần tạo được hứng thú, lôi cuốn HS vào quá trình tìm hiểu, giải quyết các câu hỏi và các bài toán; từ đó các em có thể tự phát hiện được vấn đề và giải quyết được vấn đề (tuy nhiên, có những vấn đề vẫn cần sự giúp đỡ của thầy giáo).

- Mức độ khó khăn được thể hiện trong các tình huống gợi vấn đề đã xây dựng là đúng mức, kiến thức là vừa sức đối với HS.

- Sau bài học, đa số HS đã nắm được kiến thức cơ bản, có kỹ năng vận dụng vào việc giải bài toán được giao.

- HS đã bước đầu làm quen được với một số phương pháp và thủ thuật tìm đoán. Đặc biệt là số đã có thói quen "bắt chước" và "thực hành" về tư duy có lí như: tương tự hóa, đặc biệt hóa, khái quát hóa và tổng quát hóa, ... Nhờ phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề với các tình huống được nêu trên, giờ học đã sôi động hơn, HS làm việc nhiều hơn, suy nghĩ nhiều hơn, hoạt động một cách tự giác, độc lập và sáng tạo.

- Nhận xét: "Phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề là có tính khả thi". Nó không chỉ áp dụng cho những tình huống như đã trình bày trong luận văn, mà còn có thể áp dụng trong một số các vấn đề khác; phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề đã ẩn tàng trong đó.

Các tình huống gợi vấn đề đã nêu trong luận văn đã giúp đỡ rất nhiều cho GV trong việc thực hiện dạy học theo phương pháp mới, nhằm thực hiện đổi mới phương pháp dạy học môn Toán ở Trường THPT hiện nay. Cũng nhờ những tình huống này, GV sử dụng như là tài liệu tham khảo, nó giúp cho các GV giảm bớt được nhiều công sức trong quá trình soạn bài, chuẩn bị bài trước khi lên lớp. Vì vậy, có thể xem những tình huống gợi vấn đề đã nêu trong luận văn là “những trường hợp làm mẫu” để GV sử dụng trong việc xây dựng những tình huống có vấn đề khác trong quá trình dạy học toán ở Trường THPT.

- Một số GV có ý kiến đồng ý với kết luận rằng: Để thực hiện đổi mới phương pháp dạy học, phải kết hợp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề với các phương pháp dạy học khác, nhất là các phương pháp tiên tiến trên thế giới được vận dụng vào thực tiễn ở Việt Nam. Hiệu quả sử dụng phương pháp dạy học này còn tùy thuộc vào năng lực sư phạm của GV và trình độ nhận thức của HS.

3.4.3. Những kết luận ban đầu rút ra được từ kết quả của thực nghiệm sư phạm

- Qua kết quả của thực nghiệm sư phạm đã nêu trên ta thấy rằng: Nếu áp dụng phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề qua hệ thống câu hỏi vấn đáp phát hiện và giải quyết vấn đề được xây dựng trong luận văn thì:

- Có khả năng tạo được môi trường cho HS học được cách “tự khám phá”, tự phát hiện và giải quyết vấn đề.

- Có khả năng góp phần phát triển tư duy toán học cho HS.

- Có khả năng góp phần tạo cơ sở ban đầu giúp các GV thực hiện dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề trong quá trình dạy học toán, mà trước hết là trong quá trình dạy học chương tổ hợp và xác suất (Đại số 11)

3. 5. Kết luận chương 3

Kết quả thực nghiệm cho phép nhận định như sau:

- DH phát hiện và GQVĐ môn Toán ở trường Trung học phổ thông là có tính khả thi.

- DH phát hiện và GQVĐ phát huy được tính tích cực, chủ động, sáng tạo trong học tập của HS, và nâng cao chất lượng tiếp thu kiến thức.

- Như vậy, phát hiện và GQVĐ là một phương pháp DH có hiệu quả. Vì vậy trong quá trình DH chúng ta cần có những biện pháp vận dụng PPDH này nhằm nâng cao hiệu quả việc dạy và học. Đồng thời trang bị cho HS năng lực phát hiện và GQVĐ một trong những yếu tố cần thiết với mọi HS trong học tập và cuộc sống.

KẾT LUẬN

Từ những vấn đề đã trình bày, luận văn đạt được các kết quả sau:

1. Luận văn đã nghiên cứu cơ sở lý luận về dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề. Những khó khăn, sai lầm và thực trạng của việc áp dụng dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề cũng được bàn đến trong luận văn.

2. Dựa trên cơ sở lý luận, luận văn đã vận dụng dạy học và giải quyết vấn đề vào dạy học những tình huống điển hình trong chương tổ hợp và xác suất (Dạy học khái niệm toán học, định lý toán học, quy tắc phương pháp và giải bài tập toán học). Luận văn đã đưa ra được nhiều ví dụ minh hoạ. Nhìn chung những ví dụ này được lựa chọn rất cẩn thận và có thể thuyết phục người đọc.

3. Thực nghiệm sư phạm đã được tổ chức nhằm kiểm nghiệm tính khả thi và tính hiệu quả của những biện pháp được đề ra trong luận văn.

Từ những kết quả thu được, có thể kết luận rằng luận văn góp phần đổi mới phương pháp dạy học môn toán, nâng cao chất lượng đào tạo và giáo dục. Luận văn có thể là một tài liệu tham khảo bổ ích, thiết thực cho các GV toán THPT.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ giáo dục và đào tạo (2007), *Tài liệu bồi dưỡng GV thực hiện chương trình, sách giáo khoa lớp 11 môn Toán.*

2. Nguyễn Hữu Châu (1995), *Dạy học giải quyết vấn đề trong môn Toán*. Tạp chí Nghiên cứu giáo dục, số 9/1995.

3. G.Polya (1997), *Giải một bài toán như thế nào*, NXB Giáo dục.

4. Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình (1981), *Giáo dục học môn Toán*, NXB Giáo dục.

5. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên) (2010), *Đại số và Giải tích 11*, NXB Giáo dục.

6. Nguyễn Bá Kim (2004). *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm.

7. Nguyễn Bá Kim, Vũ Dương Thụy (1992), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Giáo dục.

8. *Luật giáo dục* (2005), NXB Chính trị Quốc gia, Hà Nội

9. Bùi Văn Nghị (2008), *Phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm.

10. Bùi Văn Nghị (2009). *Vận dụng lí luận vào thực tiễn dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, NXB Đại học Sư phạm.

11. Bùi Văn Nghị, Trần Trung, Nguyễn Tiến Trung (2010), *Dạy học theo chuẩn kiến thức, kỹ năng môn Toán lớp 11*, NXB Đại học Sư phạm.

12. Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên) (2010), *Đại số và Giải tích 11*, NXB Giáo dục.

13. Nguyễn Thế Thạch, Nguyễn Hữu Châu, Quách Tú Chương, Nguyễn Trung Hiếu, Đoàn Thế Phiệt, Phạm Đức Quang, Nguyễn Thị Quý Sửu (2009). *Hướng dẫn thực hiện chuẩn kiến thức, kỹ năng môn Toán lớp 11*, NXB Giáo dục.

14. Vũ Văn Tảo, Trần Văn Hà (1996). *Dạy – Học giải quyết vấn đề: một hướng đổi mới trong công tác giáo dục, đào tạo, huấn luyện*, trường cán bộ quản lí giáo dục và đào tạo Hà Nội.
15. *Văn kiện hội nghị trung ương lần thứ hai ban chấp hành trung ương khóa VIII, Đảng cộng sản Việt Nam*, NXB Chính trị Quốc gia 1997.
16. V.Ô kôn (1976), *Những cơ sở của dạy học nêu vấn đề*, NXB Giáo dục